**Доклады Академии наук СССР**
**1971. Том 198, № 4**

УДК 519.52 : 517.51 *МАТЕМАТИКА*

Г. В. ЧУДНОВСКИЙ, Д. В. ЧУДНОВСКИЙ

# РЕГУЛЯРНЫЕ И УБЫВАЮЩЕ НЕПОЛНЫЕ УЛЬТРАФИЛЬТРЫ

*(Представлено академиком В. М. Глушковым 26 XI 1970)*

В работе исследуются убывающие $\alpha$-неполные ультрафильтры, т. е. ультрафильтры, содержащие убывающую последовательность длины $\alpha$, $\alpha \geqslant \omega_0$ с пустым пересечением. Доказывается (теорема 2), что если ультрафильтр $D$ убывающе $\alpha^+$-неполон при регулярном $\alpha$, то $D$ убывающе $\alpha$-неполон. При предположении $2^\alpha = \alpha^+$ это доказано в [1]. Там же был поставлен вопрос о выполнимости этого результата без предположения $2^\alpha = \alpha$, а в [2] вопрос был повторен для случая $\alpha = \omega_1$. Теорема 7, таким образом, дает ответ на вопросы [1, 2].

Исследуются также $(\beta, \gamma)$-регулярные ультрафильтры и доказываются новые результаты об убывающе $\theta$-неполных ультрафильтрах при $\theta \in M(AC) \setminus AC$ или $\theta \in M(\overline{AC}) \setminus \overline{AC}$.

1. Воспользуемся стандартными обозначениями и понятиями теории множеств (см. [4, 7]). Символы $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\lambda$ обозначают бесконечные кардиналы, а $\xi$, $\zeta$, $\mu$, $\eta$, $\rho$ — ординалы. Для множества $A$ $|A|$ — мощность $A$.

Пусть $D$ — ультрафильтр над $\lambda$. Если $\beta \leqslant \gamma \leqslant \lambda$, то $D$ называется, согласно [3], $(\beta, \gamma)$-регулярным (символически $(\beta, \gamma) \in R[D]$), когда существует семейство $\{X_i\}_{i \in I} \subseteq D$ такое, что $|I| = \gamma$ и из $Y \subseteq I$, $|Y| = \beta$ следует $\bigcap_{i \in Y} X_i = \phi$. Отметим такие простые свойства множества пар кардиналов $R[D]$ (см. [3]).

З а м е ч а н и е 1. Если $(\beta, \gamma) \in R[D]$ и $\beta \leqslant \beta' \leqslant \gamma' \leqslant \gamma$, то $(\beta', \gamma') \in R[D]$. Из $(\mathrm{cf}(\beta), \mathrm{cf}(\beta)) \in R[D]$ следует $(\beta, \beta) \in R[D]$.

Если существует $\alpha$-убывающая последовательность $X_0 \supseteq \ldots \supseteq X_\eta \supseteq \ldots$: $\eta < \alpha$ элементов ультрафильтра $D$ такая, что $\bigcap_{\eta<\alpha} X_\eta = \phi$, то ультрафильтр $D$ называется, в силу [1], у б ы в а ю щ е $\alpha$-н е п о л н ы м (следуя [5], обозначим это так: $\alpha \in [D]$).

Очевидно следующее

З а м е ч а н и е 2. Если $D$ однороден на $\lambda$, т. е. из $A \in D$ следует $|A| = \lambda$, то $\mathrm{cf}(\lambda) \in [D]$; $\alpha \in [D]$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{cf}(\alpha) \in [D]$. Из $\alpha \in [D]$ следует $(\alpha, \alpha) \in R[D]$.

Понятно, что условие существования такой последовательности $Y_0 \subseteq \ldots \subseteq Y_\eta \subseteq \ldots$: $\eta < \alpha$ множеств, не принадлежащих $D$, что $\bigcup_{\eta<\alpha} Y_\eta \in D$ эквивалентно условию $\alpha \in [D]$.

П р е д л о ж е н и е 1. *Если $\alpha$ регулярен, то $\alpha \in [D]$ тогда и только тогда, когда $(\alpha, \alpha) \in R[D]$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу замечания 2, $\alpha \in [D]$ влечет $(\alpha, \alpha) \in R[D]$. Пусть $\alpha \notin [D]$ и $\{A_\xi\}_{\xi<\alpha} \subseteq D$. Достаточно показать существование такого множества $s \subseteq \alpha$, $|S| = \alpha$, что $\bigcap_{\xi \in S} A_\xi \neq \phi$. Для функции $f \in 2^\alpha$ положим $A^f = \bigcap_{\xi<\alpha} A_\xi^{f(\xi)}$, где $A_\xi^1 = A_\xi$, $A_\xi^0 = \lambda \setminus A_\xi^1$. Пусть $K = \{f\colon f \in 2^\alpha,\ A^f = \phi\}$ и для $f \in K$, $S_f = \{\xi\colon\ \xi < \alpha,\ f(\xi) = 1\}$. Если для некоторого $f \in K$ будет $|S_f| = \alpha$, то предложение доказано.

Предположим, что $|S_f| < \alpha$ для всех $f \in K$. Поскольку $\alpha$ регулярен, то $S_f \subseteq \zeta$ для некоторого $\zeta < \alpha$ при $f \in K$. Полагаем при $\eta < \alpha$, $Y_\eta = \bigcup\{A^f: f \in K, S_f \subseteq \eta\}$. Тогда $Y_0 \subseteq \ldots \subseteq Y_\eta \subseteq \ldots : \eta < \alpha$ и $\bigcup_{\eta<\alpha} Y_\eta = \lambda \in D$, так как $\bigcup_{f \in K} A^f_\eta = \lambda$ и $|S_f| < \alpha$ при $f \in K$. Ввиду того, что $\alpha \notin [D]$, при некотором $\eta < \alpha$ $Y_\eta \in D$. Поскольку $A_\eta \in D$, то $|Y_\eta \cap A_\eta| = \lambda$ и для некоторого $\rho < \lambda$, $\rho \in A_\eta \cap Y_\eta$. Но из $\rho \in Y_\eta$ следует, что $\rho \in A^f$ при $S_f \subseteq \eta$, т. е. $\rho \in A_\eta^0 = \lambda \setminus A_\eta$. Это противоречит $\rho \in A_\eta$ и, таким образом, $|S_f| = \alpha$ для некоторого $f \in K$. Значит, $(\alpha, \alpha) \notin R[D]$.

Предложение 1 в случае $\alpha = \omega_1$ при предположении $2^{\omega_1} = \omega_1$ доказано в ([5]).

2. Опишем необходимую в дальнейшем конструкцию, восходящую к С. Уламу (см. ([8])). Пусть $\alpha \geqslant \omega_0$ и для $\xi < \alpha^+$, $f_\xi$ — взаимно однозначная функция из $\xi$ в $\alpha$. Положим для $\zeta < \alpha^+$ и $\eta < \alpha$, $A_\eta^{(\zeta)} = \{\xi: \zeta < \xi < \alpha^+, f_\xi(\zeta) = \eta\}$. Тогда, очевидно, $\bigcup_{\eta<\alpha} A_\eta^{(\zeta)} \cup \zeta + 1 = \alpha^+$ при $\zeta < \alpha^+$ и $A_\eta^{(\zeta)} \cap A_\eta^{(\xi)} = \phi$ при $\eta < \alpha$, $\xi \neq \zeta$.

Теорема 1. *Пусть $D$ — однородный над $\alpha^+$ ультрафильтр.*

*Тогда либо $\alpha \in [D]$, либо для некоторого $\beta < \alpha$ $(\beta^+, \alpha^+) \in R[D]$.*

Доказательство. Предположим, что $\alpha \notin [D]$. Поскольку $D$ — однородный ультрафильтр над $\alpha^+$, то $\zeta \notin D$ для любого $\zeta < \alpha^+$. Положим при $\zeta < \alpha^+$, $\eta < \alpha$, $Y_\eta^{(\zeta)} = \bigcup_{\mu \leqslant \eta} A_\mu^{(\zeta)}$. Тогда $Y_0^{(\zeta)} \subseteq \ldots \subseteq Y_\eta^{(\zeta)} \subseteq \ldots : \eta < \alpha$ и $\bigcup_{\eta<\alpha} Y_\eta^{(\zeta)} = \alpha^+ \setminus (\zeta + 1) \in D$ для любого $\zeta < \alpha^+$.

Поскольку $\alpha \notin [D]$, то для любого $\zeta < \alpha^+$ существует $\eta < \alpha$ такое, что $Y_\eta^{(\zeta)} \in D$. Поэтому $\alpha^+ = \bigcup_{\eta<\alpha} T_\eta$, где $T_\eta = \{\zeta: \zeta < \alpha^+, Y_\eta^{(\zeta)} \in D\}$. Значит, для некоторого $\eta_0 < \alpha$, $|T_{\eta_0}| = \alpha^+$. Пусть $\beta = |\eta_0| < \alpha$. Покажем, что семейство $\{Y_{\eta_0}^{(\zeta)}\}_{\zeta \in T_{\eta_0}} \subseteq D$ удовлетворяет условию $(\beta^+, \alpha^+)$-регулярности $D$. Пусть $S \subseteq T_{\eta_0}$, $|S| = \beta^+$ и при $\rho < \alpha^+$, $\rho \in \bigcap_{\zeta \in S} Y_{\eta_0}^{(\zeta)}$. В силу определения $Y_\eta^{(\zeta)}$ получаем $S = \bigcup_{\mu \leqslant \eta_0} S_\mu$, где $S_\mu = \{\zeta: \zeta \in S, \rho \in A_\mu^{(\zeta)}\}$ при $\mu \leqslant \eta_0$. Ввиду того, что $|S| = \beta^+$ и $|\eta_0| = \beta$, то $|S_\mu| = \beta^+$ при некотором $\mu \leqslant \eta_0$. Условие $|\{\zeta: \rho \in A_\mu^{(\zeta)}\}| > 1$ противоречит тому, что $A_\mu^{(\zeta)} \cap A_\mu^{(\xi)} = \phi$ при $\zeta \neq \xi$. Таким образом, $\bigcap_{\zeta \in S} Y_{\eta_0}^{(\zeta)} = \phi$ при $S \subseteq T_{\eta_0}$, $|S| = \beta^+$ и $D$ будет $(\beta^+, \alpha^+)$-регулярным, где $\beta < \alpha$.

Следствие 1. *Если $D$ однороден над $\alpha^+$, то $\alpha \in [D]$ при регулярном $\alpha$.*

Доказательство. В силу теоремы 1 либо $\alpha \in [D]$, либо $(\beta^+, \alpha^+) \in R[D]$ при $\beta < \alpha$. Но при $\beta < \alpha$, $\beta^+ \leqslant \alpha$ и из $(\beta^+, \alpha^+) \in R[D]$ следует $(\alpha, \alpha) \in R[D]$ ввиду замечания 1. Тогда, согласно предложению 1, $\alpha \in [D]$.

Следствие 2. *Если $D$ однороден над $\alpha^+$ при сингулярном $\alpha$, то либо $\alpha \in [D]$, либо для некоторого $\beta < \alpha$, $\gamma \in [D]$ при любом регулярном $\gamma$, $\beta \leqslant \gamma < \alpha$.*

Следствие 2 следует из теоремы 1, замечания 1 и предложения 1.

Теорема 2. *Если $\alpha$ регулярен и $\alpha^+ \in [D]$, то $\alpha \in [D]$.*

Доказательство. Пусть $D$ содержит $\alpha^+$-убывающую последовательность

$$Y_0 \supseteq \ldots \supseteq Y_\xi \supseteq \ldots : \xi < \alpha^+, \quad \bigcap_{\xi<\alpha^+} Y_\xi = \phi.$$

Для $\xi < \alpha^+$ полагаем $Z_\xi = [\bigcap_{\eta<\xi} Y_\eta] \setminus Y_\xi$.

Определим ультрафильтр $E$ над $\alpha^+$ так: если $X \subseteq \alpha^+$, то положим $X \in E$, если $\bigcup_{\xi \in X} Z_\xi \in D$. Если $X \subseteq \alpha^+$ и $|X| < \alpha^+$, то $X \subseteq \eta$ для некоторого $\eta < \alpha^+$. Поэтому $Y_\eta \cap [\bigcup_{\xi \in X} Z_\xi] = \phi$, т. е. $X \notin E$. Итак, $E$ однороден над $\alpha^+$. Ввиду следствия 1 $E$ имеет $\alpha$-убывающую последовательность $X_\eta$: $\eta < \alpha$ такую, что $\bigcap_{\eta < \alpha} X_\eta = \phi$. Тогда $D$, очевидно, содержит $\alpha$-убывающую последовательность.

Как уже отмечалось, теорема 2 дает ответ на вопросы Ч. Чанга [1, 2].

Теорема 3. *Если $\alpha$ сингулярен и $\alpha^+ \in [D]$, то либо* cf $(\alpha) \in [D]$, *либо существует такое $\beta < \alpha$, что для любого регулярного $\gamma$, $\beta \leqslant \gamma < \alpha$, $\gamma \in [D]$.*

Теорема 3 выводится из следствия 2, как и теорема 2 из следствия 1. При обобщенной континуум-гипотезе теорема 3 доказывалась в [4].

3. Рассмотрим конструкцию «Уламовской матрицы для недостижимых кардиналов, введенную Хайналом в [6]. Рассмотрим случай $\theta \in M(\overline{AC}) \setminus \overline{AC}$ или $\theta \in M(AC) \setminus AC$, где $AC\,(\overline{AC})$ — класс всех не сильно (не слабо) недостижимых кардиналов, а $M(X)$ — операция Мало, примененная к классу кардиналов $X$. Из [6] вытекает, что при $\theta \in M(\overline{AC}) \setminus \overline{AC}$ (или $\theta \in M(AC) \setminus AC$) существует $A \subseteq \mathrm{SN} \cap \theta$ такое, что $A \in C(\theta)$. Здесь и далее SN, Reg, Lim, Card — классы всех сингулярных, регулярных, предельных и просто всех кардиналов соответственно. Символы Stat$(\theta)$ и $C(\theta)$ обозначают семейство стационарных и замкнутых подмножеств $\theta$ в смысле [6].

Согласно [8] для любого $\beta \in A$ существует взаимно однозначная регрессивная функция $f_\beta$ на $\beta \cap A$ (т.е. при $\xi \in \beta \cap A$, $f(\xi) < \xi$). Полагая, как и в [6], для $\xi \in A$ и $\eta < \xi$ $A_\eta^{(\xi)} = \{\beta\colon \beta \in A, \beta > \xi, f_\beta(\xi) = \eta\}$, получаем (см. [6]) $\bigcup_{\eta < \xi} A_\eta^{(\xi)} \cup \xi + 1 = A$ и $A_\eta^{(\xi)} \cap A_\eta^{(\zeta)} = \phi$ при $\xi \neq \zeta$; $\xi, \zeta \in A$.

Отметим, что так как $A \in C(\theta)$ и $\theta$ — недостижимый кардинал, то $|A| = \theta$ при $\theta \in M(\overline{AC}) \setminus \overline{AC}$ или $\theta \in M(AC) \setminus AC$. Кроме того, для любого $\beta < \theta$ такого, что cf $(\beta) = \beta$, множество $A^\beta = \{\xi\colon \xi \in A, \text{cf}\,(\xi) = \beta\}$ стационарно, так как $A$ замкнуто.

Теорема 4. *Пусть $\theta \in M(AC) \setminus AC$ или $\theta \in M(\overline{AC}) \setminus AC$, а $D$ — однородный над $A$ ультрафильтр.*

*Тогда либо* $[D] = \theta \cap \mathrm{Reg}$, *либо для некоторого* $\alpha < \theta$ $(\alpha, \theta) \in R[D]$.

Доказательство. Пусть $\beta < \theta$, но $\beta \notin [D]$. В силу замечания 2 можно считать, что cf$(\beta) = \beta$. Пусть $\alpha \in A^\beta$, т.е. $\alpha \in A$ и cf$(\alpha) = \beta$. Значит, $\alpha = \sum_{\eta < \beta} \gamma_\eta$, где $\gamma_0 < \ldots < \gamma_\eta < \ldots$: $\eta < \beta$. Полагаем $Y_\eta^{(\alpha)} = \bigcup_{\mu < \gamma_\eta} A_\mu^{(\alpha)}$, при $\eta < \beta$. Тогда $Y_0^{(\alpha)} \subseteq \ldots \subseteq Y_\eta^{(\alpha)} \subseteq \ldots$: $\eta < \beta$ и $\bigcup_{\eta < \beta} Y_\eta^{(\alpha)} \cup \alpha + 1 = A$. Поскольку $D$ однороден и $\alpha < \theta$, то $\bigcup_{\eta < \beta} Y_\eta^{(\alpha)} \in D$. Так как $\beta \notin [D]$, то для любого $\alpha < \theta$, $\alpha \in A^\beta$ существует $\eta = g(\alpha) < \beta$ такое, что $Y_\eta^{(\alpha)} \in D$, т.е. $\bigcup_{\mu < \gamma_\eta} A_\mu^{(\alpha)} \in D$ при $\gamma_\eta < \alpha$. Если положить $f(\alpha) = \gamma_{g(\alpha)}$, то функция $f$ будет регрессивной на $A^\beta$. Ввиду того, что $A^\beta$ стационарно, в силу [8] существует $\zeta < \theta$ такое, что $|f^{-1}(\{\zeta\})| = \theta$. Тогда $\zeta = \gamma_\eta$ для некоторого $\eta < \beta$, т.е.

$$\{\alpha\colon \bigcup_{\mu < \gamma_\eta} A_\mu^{(\alpha)} \in D\} = X \text{ и } |X| = \theta.$$

Покажем, что система $\{Y_\eta^{(\alpha)}\}_{\alpha \in X} \subseteq D$ удовлетворяет условию $(\beta, \theta)$-регулярности $D$, где $\beta = \gamma_\eta^+ < \theta$. Пусть $Z \subseteq X$, $|Z| = \beta$ и при $\rho \in A$,

$\rho \in \bigcap_{\alpha \in Z} Y_\eta^{(\alpha)}$. Отсюда по определению $Y_\eta^{(\alpha)}$ вытекает, что $Z = \bigcup_{\mu < \gamma_\eta} Z_\mu$, где $Z_\mu = \{\alpha\colon \alpha \in Z, \rho \in A_\mu^{(\alpha)}\}$. Поскольку $|Z| = \gamma_\eta^{+}$, то существует такое $\mu < \gamma_\eta$, что $|Z_\mu| = \gamma_\eta^+$ и $|\{\alpha\colon \rho \in A_\mu^{(\alpha)}\}| > 1$. Это противоречит условию $A_\mu^{(\zeta)} \cap \cap A_\mu^{(\xi)} = \phi$ при $\zeta \neq \xi$ и, следовательно, $(\beta, \theta) \in R[D]$.

Следствие 3. *Для* $\theta \in M(AC) \setminus AC$ *или* $\theta \in M(\overline{AC}) \setminus \overline{AC}$ *и однородного над* $\theta$ *ультрафильтра* $D$ $|\theta \cap \mathrm{Reg} \setminus [D]| < \theta$.

Следствие 3 вытекает из теоремы 4 и предложения 1.

Теорема 5. *Если* $\theta \in M(AC) \setminus AC$ *или* $\theta \in M(\overline{AC}) \setminus \overline{AC}$ *и* $\theta \in [D]$, *то* $|\theta \cap \mathrm{Reg} \setminus [D]| < \theta$.

Доказательство теоремы 5 проводится, как и доказательство теоремы 2.

С помощью техники ([6]) может быть получен более общий, чем теорема 5, результат, относящийся к кардиналам $\alpha$ из классов $M_\omega(\overline{AC}) \setminus \overline{AC}$ или $M_\omega(AC) \setminus AC$.

Из общей теоремы 2.2 из ([1]) и результатов настоящей работы можно вывести новую информацию об элементарных расширениях полных моделей $\mathfrak{M}_\alpha$ на $\alpha$, $\alpha \geqslant \omega_0$, которые реализуют кардиналы $\beta \leqslant \alpha$.

Результаты работы докладывались на семинаре по теории множеств МГУ, руководимом А. Г. Драгалиным.

Институт математики
Академии наук УССР
Киев

Киевский государственный университет
им. Т. Г. Шевченко

Поступило
9 XI 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] C. C. Chang, Trans. Am. Math. Soc., 126, № 1, 108 (1967). [2] C. C. Chang, Sets, Models and Recursion Theory, Amsterdam, 1968. [3] H. J. Keisler, Bull. Am. Math. Soc., 70, № 4, 644 (1964). [4] C. C. Chang, J. Symb. Logic, 31, № 3 (1966). [5] K. L. Prikry, Rozprawy matematyczne, 68 (1970). [6] A. Hajnal, Bull. Acad. Polon. Sci., 17, № 11, 683 (1969). [7] К. Куратовский, А. Мостовский, Теория множеств, М., 1970. [8] H. I. Keisler, A. Tarski, Fund. Math., 53, № 3, 225 (1964).