Доклады Академии наук СССР
1971. Том 198, № 4

УДК 513.83

МАТЕМАТИКА

М. А. ШТАНЬКО

АППРОКСИМАЦИЯ ВЛОЖЕНИЙ КОМПАКТОВ В КОРАЗМЕРНОСТИ БОЛЬШЕЙ ДВУХ

(Представлено академиком П. С. Новиковым 24 XI 1970)

1. Пусть K — компакт в эвклидовом пространстве $\mathbf{E}^n$, $\dim K \leqslant n-3$; дополнение $\mathbf{E}^n \setminus K$ обладает свойством 1-*ULC*, если для любой открытой n-клетки B^n $\pi_1(B^n \setminus K) = 1$ (см. (2)). Мы доказываем теорему:

Теорема 1. *Для компакта K в $\mathbf{E}^n$, $\dim K \leqslant n-3$, и для любого $\varepsilon > 0$ существует гомеоморфный ε-сдвиг f_ε: $K \to \mathbf{E}^n$ такой, что $\mathbf{E}^n \setminus f_\varepsilon(K)$ обладает свойством 1-ULC.*

Следствие 1. *Если M^k — произвольно вложенное в $\mathbf{E}^n$ (pl)-многообразие, $M^k \subset \mathbf{E}^n$, $k \leqslant n-3$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует гомеоморфный ε-сдвиг h_ε: $M^k \to \mathbf{E}^n$ такой, что $h_\varepsilon(M^k)$ есть (pl)-подмногообразие $\mathbf{E}^n$.*

По теореме 1 вложение $M^k \subset \mathbf{E}^n$ аппроксимируется таким, которое обладает свойством 1-*ULC*, но в (3) доказано, что 1-*ULC*-вложение k-многообразия в $\mathbf{E}^n$, $k \leqslant n-3$, $n \geqslant 5$ является локально-плоским. По теореме Рашинга (5) локально-плоское вложение в $\mathbf{E}^n$ (pl)-многообразия M^k, $k \leqslant n-3$, является ε-ручным. Случай $n=4$ легко доказывается отдельно.

Доказательство аппроксимационной теоремы для частного случая клеток и сфер было дано А. В. Чернаевским (3). После этого полная аппроксимационная теорема для многообразий была доказана также А. В. Чернаевским (4) и Р. Миллером (6).

В 20-х годах К. Менгер построил компакты M_r^n (1) размерности $r < n$, лежащие в $\mathbf{E}^n$, и поставил задачу об их универсальности: существует ли для любого r-мерного подмножества X в $\mathbf{E}^n$ гомеоморфное отображение h: $X \to M_r^n$?

Следствие 2. *Компакт Менгера M_r^n универсален для всех r-мерных компактов, лежащих в $\mathbf{E}^n$.*

По теореме 1 компакт $K \subset \mathbf{E}^n$, $\dim K = r \leqslant n-3$, аппроксимируется таким, дополнение к которому обладает свойством 1-*ULC*. В (1) доказано, что для такого компакта существует изотопия $\mathbf{E}^n$ на себя, переводящая его в M_r^n. Случаи $r = n-1$, $n-2$ доказаны в (1).

Таким образом, полное решение задачи Менгера сводится к решению задачи П. С. Александрова: существует ли для любого r-мерного множества $X \subset \mathbf{E}^n$ r-мерный компакт $K \subset \mathbf{E}^n$ и гомеоморфизм h: $X \to K$? Мы дасм краткое доказательство теоремы 2, из которой следует теорема 1.

2.1. Пусть $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ — единичный репер в $\mathbf{E}^n$ и $L(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k})$ — подпространство, натянутое на векторы $(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k})$. Обозначим $L(e_1, \ldots, e_p) = \mathbf{E}^p$, $L(e_{p+1}, \ldots, e_n) = \mathbf{E}^q$. Пусть S_α^{k-1}, D_α^k, $k = p, q, n$, обозначает сферу или шар радиуса α, $0 < \alpha \leqslant 2$ в $\mathbf{E}^k$ с центром в начале координат 0. Совокупность $(D_2^n D_2^p D_2^q C^p)$ называется конструкцией типа (p, q), где $C^p = D_2^p \setminus \operatorname{int} D_1^p$, $p + q = n$.

2.2 Пусть $K \cap \operatorname{int} C^p = \Lambda$. Рассмотрим джойн $D_{1+\beta}^p * S_\beta^{q-1}$, где $\beta > 0$ — малое число. Построим отображение F: $\mathbf{E}^n \to \mathbf{E}^n$, неподвижное вне $D_{1+\beta}^p * S_\beta^{q-1}$; каждый отрезок $\overline{ao}$, где $a \in S_{1+\beta}^{p-1}$, отображается на себя неподвижно в концах так, что $\overline{bo}$ сжимается в точку, где $b = \overline{ao} \cap S_1^{n-1}$, а $\overline{ab}$ линейно отображается на $\overline{ao}$. Далее F линейно продолжается по отрезкам джойна $D^p_{1+\beta} * S^{q-1}_\beta$. Пусть $\mathbf{R}^n$ — замкнутая область, полученная из единичного шара в $L(e_1, e_{p+1}, \ldots, e_n)$ с центром в точке $e_1 = 1$, $e_i = 0$, $i = p+1, \ldots, n$, вращением вокруг $\mathbf{E}^q$. Пусть $\mathbf{E}_z{}^q$ — q-плоскость, ортогональная диску $D_2{}^p$ в точке $z \in D_2{}^p$. Обозначим $Q_z{}^q = \mathbf{R}^n \cap E_z{}^q$ и $r(z)$ — радиус q-диска $Q_z{}^q$. Пусть I: $\mathbf{E}^n \to \mathbf{E}^n$ — гомеоморфизм, выметающий компакт $F(K)$ по радиусам $r(z)$ из $\mathbf{R}^n$ так, что $IF(K) \cap (\mathbf{R}^n \setminus (0 \cup S^{p-1}_2)) = \Lambda$. Построим многозначное отображение Φ: $\mathbf{E}^n \to \mathbf{E}^n$, неподвижное вне джойна $S^{p-1}_2 * D_2{}^q$. Пусть Φ: $[s_2 o) \to [s_2 s_1)$ — линейное отображение, где $s_2 \in S^{q-1}_2$ и $s_1 = [s_2 o) \cap S^{q-1}_1$; далее Φ продолжается линейно по отрезкам джойна $S_2{}^{p-1} * (D_2{}^q \setminus 0)$; каждой точке $z \in \operatorname{int} D_2{}^p$ поставим в соответствие сферу S^{q-1}_1, лежащую в $\mathbf{E}_z{}^q$, имеющую центр в z и радиус $\frac{1}{2}(2 - \rho(oz))$. Если C — компакт в $\mathbf{E}^n$, то Φ гомеоморфно на $C \setminus \operatorname{int} D_2{}^p$, а в точке $z \in C \cap D_2{}^p$ полагаем $\Phi(z) = \overline{\Phi(C \setminus D_2{}^p)} \cap S^{q-1}_z$.

Таким образом, отображение Φ гомеоморфно на $IF(K) \setminus 0$, а $\Phi(o) = \overline{\Phi(IF(K) \setminus 0)} \cap S^{q-1}_1$. Множество $\Phi(o)$ называется **множеством разрыва**, сосредоточенным на сфере S^{q-1}_1. Преобразование ΦIF компакта K называется **перестройкой компакта** K в пространстве $\mathbf{E}^n$ **типа** (p, q), $p + q = n$.

2.3. Компакт $\Phi IF(K) = K'$ негомеоморфен компакту K. Получим из K' компакт, гомеоморфный K, операцией восстановления перестройки.

По $\gamma > 0$ построим гомеоморфизм F_γ: $\mathbf{E}^n \to \mathbf{E}^n$ такой, что $F = \lim\limits_{\gamma \to 0} F_\gamma$. Рассмотрим джойн $D^p_{1+\beta} * S^{q-1}_\beta$, $\gamma < \beta$. Гомеоморфизм F_γ отображает отрезок $\overline{ao}$, $a \in S^{p-1}_{1+\beta}$ на себя, неподвижен в концах, точку $\overline{ao} \cap S^{p-1}_{1+\gamma}$ переводит в точку $\overline{ao} \cap S^{p-1}_{\gamma+\gamma/\beta}$, точку $\overline{ao} \cap S^{p-1}_1$ переводит в точку $\overline{ao} \cap S^{p-1}_\gamma$ и линеен на соответствующих отрезках. Далее F_γ продолжается по отрезкам джойна $D^p_{1+\beta} * S^{q-1}_\beta$ и неподвижен вне его. Обозначим $\Delta^n = D^q_1 * S^{p-1}_2$, $\Delta^n_\delta = D^q_{1+\delta} * S^{p-1}_2$, $\delta > 0$. Построим отображение W: $\mathbf{E}^n \to \mathbf{E}^n$, неподвижное вне $\Delta_\delta{}^n$. Пусть l — отрезок в $\Delta_\delta{}^n$, ортогональный $D_2{}^p$, с концами на $D_2{}^p$ и на $\partial \Delta_\delta{}^n$. W отображает l на себя неподвижно в концах так, что $l \cap \Delta^n$ сжимается в точку, а оставшаяся часть линейно отображается на l. При подходящем подборе чисел β, γ, δ компакт K гомеоморфен компакту $W\Phi IF_\gamma(K) = K''$ и отображение компакта K' в компакт K'' неподвижно вне как угодно малой окрестности q-диска $D_1{}^q$.

Мы пользуемся только перестройками типов $(2, n-2)$ и $(n-2, 2)$.

3. **Теорема 2.** *Пусть $(D_2{}^n, D_2{}^2)$ — пара шаров в $\mathbf{E}^n$ и K — компакт в $\mathbf{E}^n$, $\dim K \leqslant n - 3$, $(\operatorname{int} C^2) \cap K = \Lambda$.*

Тогда существует гомеоморфизм f: $K \to \mathbf{E}^n$ такой, что

$$f|_{K \setminus \operatorname{int} D^n_2} = 1, \; f(K \cap \operatorname{int} D^n_2) \subset \operatorname{int} D^n_2, \; f(K) \cap \operatorname{int} D^2_2 = \Lambda.$$

Доказательство дается в 3.1 и 3.2. В 3.1 строится преобразование $\Psi = \chi_\nu \ldots \chi_1$ компакта K, в 3.2 Ψ используется многократно и приводит к предельному процессу, сходящемуся к гомеоморфизму f. Для $n = 3, 4, 5$ теорема 2 доказывается из соображений общего положения; пусть поэтому $n \geqslant 6$.

3.1. Применим к компакту K перестройку $\chi_1 = \Phi IF$ типа $(2, n-2)$. Если $\sigma > 0$ достаточно мало, то плоскость $E_0{}^2$, проведенная через точку $x_0 = (0, 0, \sigma + 1, 0, \ldots, 0)$ параллельно E^2, высекает из множества $Z^n = D_2{}^n \setminus (\operatorname{int} \Delta^n \cup \Phi(\operatorname{int} R^n))$ диск $B_0{}^2$. Пусть B^2 — диск, концентрический диску $B_0{}^2$, $\chi_1(K) \cap B_0{}^2 \subset \operatorname{int} B^2$. Через B^n обозначим шар с центром в точке x_0, того же радиуса, что и B^2, предполагая, что $B^n \subset \operatorname{int} Z^n$. Поскольку $\dim K \leqslant n - 3$ и $n \geqslant 6$, то существует ориентируемая поверхность $\overline{P^2}$, натянутая на ∂B^2 внутри $B^n \setminus \chi_1(K)$. Поскольку $n \geqslant 6$, то существует гомеоморфизм χ_2: $\mathbf{E}^n \to \mathbf{E}^n$, неподвижный вне $\operatorname{int} B^n$ и переводящий $\overline{P}^2$ в поверхность $P^2 \subset \mathbf{E}^3 \cap B^n$, где $\mathbf{E}^3 = L(e_1, e_2, e_3)$, получающуюся добавлением к B^2 незаузленных и незацепленных трубчатых ручек с той стороны B^2, которая обращена к лучу $[x_0, \infty)$. Через d_i^2, $i = 1, 2, \ldots, k$, обозначим плоские 2-клетки, натянутые на ручки по окружностям $s_i^1 = \partial d_i^2 = p^2 \cap d_i^2$, идущим вдоль ручек; d_i^2 попарно не пересекаются. Пусть o_i — точка внутри d_i^2. Через d_{2i}^2 обозначим «круглый» диск с центром в o_i, лежащий в d_i^2 и имеющий малый диаметр. Через d_{2i}^n обозначим «круглый» шар с центром в точке o_i того же диаметра, что и d_{2i}^2, в d_{2i}^n выберем $(n-2)$-диск d_{2i}^{n-2} «ортогонально» к d_{2i}^2 так, что $(d_{2i}^n d_{2i}^2 d_{2i}^{n-2}\ c_i^2)$ есть конструкция типа $(2, n-2)$. Пусть $d_{1i}^n d_{1i}^2 d_{1i}^{n-2}$ — соответствующие диски в два раза меньшего радиуса, $c_i^2 = d_{2i}^2 \setminus \operatorname{int} d_{1i}^2$. Не нарушая общности, можно предполагать, что $\chi_2\chi_1(K) \cap d_i^2 \subset d_{1i}^2$. Пусть χ_{3i} — перестройка компакта $\chi_2\chi_1(K)$ относительно конструкции $(d_{2i}^n d_{2i}^2 d_{2i}^{n-2}\ c_i^2)$, $\chi_3 = \chi_{3k} \ldots \chi_{31}$. Пусть $\overline{N}_i^3$ — 3-клетка, представляющая собой параллельное утолщение диска d_i^2 в $\mathbf{E}^3$ такое, что $\overline{N}_i^3 \cap \chi_3\chi_2\chi_1(K) = \Lambda$. Объединение $\overline{N}_i^3$ с полостью i-й ручки есть 3-клетка N_i^3. Ее граница состоит из двух дисков, один из которых есть $n_i^2 = N_i^3 \cap B^2$ и другой $\bar{n}_i^2$. Обозначим через $\overline{B}^2$ 2-диск, полученный из B^2 заменой дисков n_i^2 на $\bar{n}_i^2$. Существует гомеоморфизм χ_4: $\mathbf{E}^4 \to \mathbf{E}^n$, неподвижный вне как угодно малой окрестности $\bigcup\limits_i N_i^3$ и на $B^2 \setminus \bigcup\limits_i \operatorname{int} n_i^2$ и такой, что $\chi_4(\overline{B}^2) = B^2$ и $\chi_4 \ldots \chi_1(K) \cap B_0^2 = \Lambda$. Произведем операцию χ_5, восстанавливающую разрыв перестройки χ_1. Напомним, что χ_5 неподвижно вне малой окрестности диска D_1^{n-2}. Объединение B_0^2 с отрезками, соединяющими соответствующие точки из окружностей ∂B_0^2 и S_2^1, дает диск $\overline{D}^2$. Пусть χ_6: $\mathbf{E}^n \to \mathbf{E}^n$ — гомеоморфизм, переводящий $\overline{D}^2$ на D_2^2 неподвижно вне малой окрестности 3-клетки, ограниченной в $\mathbf{E}^3$ дисками $\overline{D}^2$ и D_2^2. Так как $\chi_5 \ldots \chi_1(K) \cap \operatorname{int} \overline{D}^2 = \Lambda$, то $\chi_6 \ldots \chi_1(K) \cap \operatorname{int} D_2^2 = \Lambda$. Возможно, что $\chi_6 \ldots \chi_1(K) \cap \operatorname{int} d_{1i}^{n-2} \neq \Lambda$, но имеется внешнее кольцо c_i^{n-} диска d_{1i}^{n-2} такое, что $(\operatorname{int} c_i^{n-2}) \cap \chi_6 \ldots \chi_1(K) = \Lambda$.

Пользуясь конструкцией $(d_{1i}^n d_{1i}^{n-2}\ d_{1i}^2 c_i^{n-2})$ типа $(n-2, 2)$, произведем перестройку χ_{7i}, $\chi_7 = \chi_{7k} \ldots \chi_{71}$. Получаем $\chi_7 \ldots \chi_1(K) \cap d_{1i}^{n-2} = \Lambda$. Теперь восстанавливаем перестройку χ_{3i} с помощью преобразования χ_{8i}, $\chi_8 = \chi_{8k} \ldots \chi_{81}$.

3.2. Согласно п. 3.1 существует преобразование $\Psi_0 = \chi_8 \ldots \chi_1$ компакта K, неподвижное вне D_2^n и такое, что $\Psi_0(K) \cap \operatorname{int} D_2^2 = \Lambda$. Но Ψ_0 обладает разрывами, сосредоточенными на границах некоторых 2-дисков $\bar{d}_i^2$, $i = 2, \ldots, k$, не пересекающихся между собой и не пересекающих D_2^2. Возможно, что $\Psi_0(K) \cap \operatorname{int} \overline{d_i^2} = \Lambda$. Но $\bar{d}_i^2$ имеет внешнее кольцо $\bar{c}_i^2$ такое, что $\operatorname{int} \bar{c}_i^2 \cap \Psi_0(K) = \Lambda$. Это дает возможность произвести следующее преобразование Ψ_1 компакта $\Psi_0(K)$ одновременно в n-шарах $\bar{d}_i^n$, содержащих $\bar{d}_i^2$ и имеющих тот же диаметр, относительно конструкции $(\bar{d}_i^n \bar{d}_i^2 \bar{d}_i^{n-2}\ \bar{c}_i^2)$, $\Psi_1(K) \cap \operatorname{int} \bar{d}_i^2 = \Lambda$. Далее восстанавливаем разрывы преобразования Ψ_0 отдельно для каждого $i = 1, 2, \ldots, k$. Суперпозицию этих преобразований обозначим Σ_1. Затем рассмотрим преобразование Ψ_2 и с помощью Σ_2 восстанавливаем разрывы, возникшие при преобразовании Ψ_1 и т. д. Получаем последовательность преобразований $\Psi_0\Psi_1\Sigma_1\Psi_2\Sigma_2 \ldots$ Рассмотрим суперпозицию $\Gamma_m = \Sigma_m\Sigma_{m-1}\Psi_{m-1} \ldots \Sigma_1\Psi_1\Psi_0$. Γ_m является непрерывным отображением на всем компакте K. Для любых двух последовательностей чисел $\mu_m > 0$ и $\nu_m > 0$, $m = 1, 2$, последовательность непрерывных отображений Γ_m: $K \to \mathbf{E}^n$ можно выбрать так, что каждое отображение Γ_m является μ_m-отображением (т. е. прообраз точки имеет диаметр, не больший μ_m), и $\rho(\Gamma_m, \Gamma_{m+1}) < \nu_m$. Из этих условий вытекает, что предельное отображение $f = \lim\limits_{m \to \infty} \Gamma_m$ существует и является гомеоморфизмом.

4. Доказательство теоремы 1. Пусть M^n — n-параллелепипед $\operatorname{int} M^n \supset K$ и $(M^n)_{2i}$ — двойственные 2-остовы i-го кубильяжа параллелепипеда M^n, измельчающегося к нулю, когда $i \to \infty$. Так как $\dim K \leqslant n-3$, то можно предполагать, что K не пересекается с 1-остовом мелкой триангуляции полиэдра $(M^n)_{2i}$, $i = 1, 2, \ldots$ По теореме 1 можно снять компакт K с полиэдра $(M^n)_{2i}$ малыми сдвигами отдельно для каждого 2-симплекса. Так как каждый последующий сдвиг компакта K может быть выбран сколь угодно малым независимо от всех предыдущих, то в пределе получим гомеоморфизм f_ε: $K \to M^n_{n-3}(\varepsilon)$, где компакт $M^n_{n-3}(\varepsilon)$ гомеоморфен компакту Менгера M^n_{n-3}. Но если $C \subset M^n_{n-3}(\varepsilon)$, то $E^n \setminus C$ обладает свойством 1-ULC. Таким образом, $E^n \setminus f_\varepsilon(K)$ обладает свойством 1-ULC.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
4 XI 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. А. Штанько, ДАН, 186, № 6, 1269 (1969). [2] М. А. Штанько, Матем. сборн. 83 (125), № 2 (10), 243 (1970). [3] А. В. Чернавский, ДАН, 187, № 6, 1247 (1969). [4] А. В. Чернавский, Матем. сборн. 82 (124), в. 3, 499 (1970). [5] T. B. Rushing, Bull. A. M. S., 75, № 9, 815 (1968). [6] R. T. Miller, Approximating Codimension 3 Embeddings, Preprint.