Доклады Академии наук СССР
1971. Том 198, № 5

УДК 517.53 *МАТЕМАТИКА*

И. И. БАВРИН

ОБ ОБОБЩЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ФОРМУЛ КОШИ, ШВАРЦА И ПУАССОНА

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 15 XII 1970)

Автором ([1–8]) в случае одного комплексного переменного дан ряд обобщений интегральных формул Коши, Шварца и Пуассона. В настоящей заметке полученное автором в ([7]) обобщение этих формул и введенные им ([5]) интегро-дифференциальные операторы используются для нового обобщения формул Коши, Шварца и Пуассона. При изложении сохраняем обозначения, использованные в ([5, 7]).

1. Пусть функция $f(z)$ голоморфна в круге $|z| < R$. Автором в работе ([5]) введены операторы

$$L_{a\tilde{a}}^{(k,\, -\tilde{k})}[f(z)], \quad L_{a\tilde{a}}^{(-k,\, \tilde{k})}[f(z)]$$

и

$$J_{a\tilde{a}}^{(k,\, -\tilde{k})}[\operatorname{Re} f(z)], \quad J_{a\tilde{a}}^{(-k,\, \tilde{k})}[\operatorname{Re} f(z)]$$

и показано, что первые два оператора взаимно обратны (аналогично и два другие оператора). В ([7]) установлено, что если функция

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \tag{1}$$

голоморфна в круге $|z| < R$, то для любого ρ $(0 < \rho < R)$ справедливы интегральные формулы

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} C_{(\tilde{\omega})}\left(e^{-i\theta}\frac{z}{\rho};\, \omega\right) f_{(\omega)}(\rho e^{i\theta};\, \tilde{\omega})\, d\theta \quad (|z| < \rho); \tag{2}$$

$$f(z) = i \operatorname{Im} f(0) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_{(\tilde{\omega})}\left(e^{-i\theta}\frac{z}{\rho};\, \omega\right) \operatorname{Re} f_{(\omega)}(\rho e^{i\theta};\, \tilde{\omega})\, d\theta \quad (|z| < \rho). \tag{3}$$

2. Пусть функция (1) голоморфна в круге $|z| < R$. Имеем

$$f(z) = L_{a\tilde{a}}^{(-k,\, \tilde{k})}[L_{a\tilde{a}}^{(k,\, -\tilde{k})}[f(z)]]. \tag{4}$$

Применяя формулы (2), (3) к функции

$$F(z) = L_{a\tilde{a}}^{(k,\, -\tilde{k})}[f(z)],$$

получаем

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} C_{(\tilde{\omega})}\left(e^{-i\theta}\frac{z}{\rho};\, \omega\right) F_{(\omega)}(\rho e^{i\theta};\, \tilde{\omega})\, d\theta \quad (|z| < \rho),$$

$$F(z) = i \operatorname{Im} F(0) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_{(\tilde{\omega})}\left(e^{-i\theta}\frac{z}{\rho};\, \omega\right) \operatorname{Re} F_{(\omega)}(\rho e^{i\theta};\, \tilde{\omega})\, d\theta \quad (|z| < \rho).$$

Нетрудно видеть, что

$$F_{(\omega)}(\rho e^{i\theta}; \widetilde{\omega}) = L_{a\,\widetilde{a}}^{(k,\,-\widetilde{k})}[f_{(\omega)}(\rho e^{i\theta}; \widetilde{\omega})].$$

Поэтому

$$L_{a\,\widetilde{a}}^{(k,\,-\widetilde{k})}[f(z)] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} C_{(\widetilde{\omega})}\left(e^{-i\theta}\frac{z}{\rho}; \omega\right) L_{a\,\widetilde{a}}^{(k,\,-\widetilde{k})}[f_{(\omega)}(\rho e^{i\theta}; \widetilde{\omega})]\,d\theta,$$

$$L_{a\,\widetilde{a}}^{(k,\,-\widetilde{k})}[f(z)] = i\,\mathrm{Im}\,L_{a\,\widetilde{a}}^{(k,\,-\widetilde{k})}[f(0)] + \\ + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S_{(\widetilde{\omega})}\left(e^{-i\theta}\frac{z}{\rho}; \omega\right)\mathrm{Re}\,L_{a\,\widetilde{a}}^{(k,\,-\widetilde{k})}[f_{(\omega)}(\rho e^{i\theta}; \widetilde{\omega})]\,d\theta.$$

Подставляя эти выражения в формулу (4) и замечая, что

$$\mathrm{Re}\,L_{a\,\widetilde{a}}^{(k,\,-\widetilde{k})}[f_{(\omega)}(\rho e^{i\theta}; \widetilde{\omega})] = J_{a\,\widetilde{a}}^{(k,\,-\widetilde{k})}[\mathrm{Re}\,f_{(\omega)}(\rho e^{i\theta}; \widetilde{\omega})],$$

придем к формулам

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} L_{a\,\widetilde{a}}^{(-k,\,\widetilde{k})}\left[C_{(\widetilde{\omega})}\left(e^{-i\theta}\frac{z}{\rho}; \omega\right)\right] L_{a\,\widetilde{a}}^{(k,\,-\widetilde{k})}[f_{(\omega)}(\rho e^{i\theta}; \widetilde{\omega})]\,d\theta \quad (|z| < \rho), \tag{5}$$

$$f(z) = i\,\mathrm{Im}\,f(0) + \\ + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} L_{a\,\widetilde{a}}^{(-k,\,\widetilde{k})}\left[S_{(\widetilde{\omega})}\left(e^{-i\theta}\frac{z}{\rho}; \omega\right)\right] J_{a\,\widetilde{a}}^{(k,\,-\widetilde{k})}[\mathrm{Re}\,f_{(\omega)}(\rho e^{i\theta}; \widetilde{\omega})]\,d\theta \quad (|z| < \rho), \tag{6}$$

В результате мы пришли к следующей теореме.

Теорема 1. *Если функция* (1) *голоморфна в круге* $|z| < R$, *то для любого* ρ $(0 < \rho < R)$ *и любых* $k = 0, 1, 2, \ldots$; $\widetilde{k} = 0, 1, 2, \ldots$ *справедливы интегральные формулы* (5) *и* (6).

3. Пусть $P_{(\widetilde{\omega})}(\theta, r; \omega)$ — введенная в [7] гармоническая в единичном круге $0 \leqslant r < 1$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ функция. Пусть далее

$$u(re^{i\varphi}) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n \cos n\varphi - \beta_n \sin n\varphi)\,r^n, \tag{7}$$

α_0, α_n, β_n $(n = 1, 2, \ldots)$ — действительные числа,— гармоническая в круге $|z| < R$ функция, а $u_{(\omega)}(re^{i\varphi}; \widetilde{\omega})$ — введенная в [7] гармоническая в круге $|z| < R$ функция.

Из теоремы 1 легко вытекает

Теорема 2. *Если функция* (7) *гармоническая в круге* $|z| < R$, *то для любого* ρ $(0 < \rho < R)$ *и любых* $k = 0, 1, 2, \ldots$; $\widetilde{k} = 0, 1, 2, \ldots$ *справедлива интегральная формула*

$$u(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} J_{a\,\widetilde{a}}^{(-k,\,\widetilde{k})}\left[P_{(\widetilde{\omega})}\left(\varphi - \theta, \frac{r}{\rho}; \omega\right)\right] J_{a\,\widetilde{a}}^{(k,\,-\widetilde{k})}[u_{(\omega)}(\rho e^{i\theta}; \widetilde{\omega})]\,d\theta, \tag{8}$$

$$0 \leqslant r < \rho, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi.$$

Московский областной педагогический институт
им. Н. К. Крупской

Поступило
25 XI 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. И. Баврин, Уч. зап. Московск. обл. пед. инст. им. Н. К. Крупской, 166, 3 (1966). [2] И. И. Баврин, ДАН, 172, № 6 (1967). [3] И. И. Баврин, Уч. зап. Московск. обл. пед. инст. им. Н. К. Крупской, 188, 3 (1967). [4] И. И. Баврин, ДАН, 180, № 1 (1968). [5] И. И. Баврин, ДАН, 186, № 2 (1969). [6] И. И. Баврин, ДАН, 187, № 3 (1969). [7] И. И. Баврин, ДАН, 194, № 2 (1970). [8] И. И. Баврин, Уч. зап. Московск. обл. пед. инст. им. Н. К. Крупской, 269, 3 (1970).