Доклады Академии наук СССР
1971. Том 198, № 5

УДК 518.9 МАТЕМАТИКА

Ю. Б. ГЕРМЕЙЕР

ОБ ИГРАХ ДВУХ ЛИЦ С ФИКСИРОВАННОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬЮ ХОДОВ

(Представлено академиком А. А. Дородницыным 16 XII 1970)

I. Затруднения по выработке решений двух игроков в конфликтной ситуации с непротивоположными интересами на основе использования точек равновесия [1] связаны с их неединственностью, когда для игроков выгодны различные точки равновесия. В этих условиях игроки или должны ориентироваться каждый на свой максимин или же в той или иной мере согласовывать свои действия.

Предположим теперь, что конфликт характерен определенным порядком ходов, так что первый игрок первым принимает свое решение. Пусть интересы игроков полностью описываются стремлением к увеличению $w_i = f_i(x_1, x_2)$, $i = 1, 2$, при $x_i \in X_i$; будем считать f_i непрерывными на компакте $X_1 \times X_2$. Первый игрок, очевидно, может выбрать желательную ему точку равновесия (если она существует) и тем самым заставить второго игрока выбрать ее же, если $f_2(x_1, x_2)$ унимодальна по x_2. Для полной определенности первому игроку следует, однако, сообщить свой выбор, т. е. передать второму игроку информацию о выбираемой x_1. Получаемый первым игроком результат при этом гарантирован, не являясь, однако, наилучшим гарантированным результатом. В качестве последнего при унимодальности f_2 он может, очевидно, обеспечить себе

$$\max_{x_1} f_1[x_1, x_2^0(x_1)] = f_1[x_1^0, x_2^0(x_1^0)];$$

$$f_2[x_1, x_2^0(x_1)] = \max_{x_2} f_2(x_1, x_2).$$

Пара x_1^0 и $x_2^0(x_1)$ всегда является точкой равновесия на $X_1 \times \tilde{X}_2$, где $\tilde{X}_2$ — множество всех функций $\tilde{x}_2 = x_2(x_1)$ при $x_2 \in X_2$, $x_1 \in X_1$; обратное, вообще говоря, не верно.

Понятие оптимального гарантированного результата и соответствующих стратегий [2, 3] легко обобщается не только на случай отсутствия унимодальности, но и на типичный случай неполной информированности первого игрока об интересах второго; при этом ничего не предполагается ни о существовании точек равновесия, ни о знании вторым игроком интересов первого. Именно, пусть интересы второго представимы в виде $w_2 = f_2(x_1, x_2, \alpha)$, причем первый игрок знает лишь, что $\alpha \in E$, в то время как $\alpha = \alpha_0$.

Пусть первый игрок, рассчитывая на определенную информацию о x_2, имеет возможность выбирать стратегию (правило поведения) $\tilde{x}_1 = x_1(x_2)$ из некоторого разрешенного компакта $\tilde{X}_1$ непрерывных стратегий при непременном условии $x_1 \in X_1$.

Пусть, наконец, второй игрок рассчитывает обладать точной информацией о выборе $\tilde{x}_1$ первым игроком (например, если первый сам ее сообщает). Тогда рациональные действия второго игрока вполне описываются функцией $\tilde{x}_2^0(\tilde{x}_1, \alpha_0)$, где x_2^0 реализует

$$\max_{x_2} f_2(\tilde{x}_1, x_2, \alpha_0) = \max_{x_2} f_2[x_1(x_2), x_2, \alpha_0]. \tag{1}$$

Обозначим через $P(\tilde{x}_1, \alpha_0)$ множество всех x_2^0 и предположим, что у первого игрока нет сведений о возможной предпочтительности для второго каких-то x_2^0 из $P(\tilde{x}_1, \alpha_0)$.

Тогда, не зная конкретного α, первый игрок, естественно, считает возможным выбор любой однозначной $x_2^0(\tilde{x}_1, \alpha)$ при $x_2^0 \in P(\tilde{x}_1, \alpha)$ и $\alpha \in E$. В этих условиях оптимальный гарантированный результат первого игрока равен

$$\max_{\tilde{x}_1 \in \tilde{X}_1} \min_{x_2^0 \in P(\tilde{x}_1, \alpha)} \min_{\alpha \in E} f_1(\tilde{x}_1, x_2^0) = \min_{x_2^0 \in P(\tilde{x}_1^0, \alpha)} \min_{\alpha \in E} f_1(\tilde{x}_1^0, x_2^0). \tag{2}$$

а $\tilde{x}_1^0$ является его оптимальной стратегией.

С точки зрения первого игрока, как показывают (1) и (2), рассматриваемая игра эквивалентна игре с противоположными интересами, если противник управляет вектором (x_2^0, α) при $\alpha \in E$ и наличии связей

$$f_2(x_2^0, \tilde{x}_1, \alpha) \geqslant f_2(x_2, \tilde{x}_1, \alpha), \tag{3}$$

которые должны быть справедливы при любом $x_2 \in X_2$. Ограничения (3) могут быть, конечно, записаны в виде одного ограничения

$$f_2(x_2^0, \tilde{x}_1, \alpha) = \varphi(\tilde{x}_1, \alpha) = \max_{x_2} f_2(x_2, \tilde{x}_1, \alpha)$$

или в виде условия (4):

$$0 = \Phi(x_2^0, \tilde{x}_1, \alpha) = \int_{X_2} \{\min [f_2(x_2^0, \tilde{x}_1, \alpha) - f_2(x_2, \tilde{x}_1, \alpha); 0]\}^2 \, dx_2. \tag{4}$$

Вводя в рассмотрение множество Q всех функций $\tilde{x}_2 = x_2^0(\tilde{x}_1, \alpha)$, удовлетворяющих (4), рассматриваемую игру можно представить еще и в виде игры с противоположными интересами $[f_1(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) / \tilde{x}_1 \in \tilde{X}_1; \tilde{x}_2 \in Q]$, которая в принятых предположениях имеет седловую точку.

С соответствующими изменениями формулировок (и, в частности, вводя ε-оптимальные стратегии), можно, конечно, избавиться от указанных требований непрерывности функций и компактности множеств.

II. Пусть первый игрок будет обладать точной информацией о x_2 и α (фиксированное α далее опускается); тогда он в качестве своего правила поведения априори может выбрать любую функцию $x_1(x_2)$, лишь бы $x_1 \in X_1$ при $x_2 \in X_2$.

Введем обозначения

$$L = \max_{x_2 \in X_2} \min_{x_1 \in X_1} f_2(x_1, x_2) = \min_{x_1 \in X_1} f_2(x_1, \bar{x}_2);$$

$$E_2 = \{\bar{x}_2 / \min_{x_1} f_2(x_1, \bar{x}_2) = L\};$$

$$M = \min_{x_2 \in E_2} \max_{x_1 \in X_1} f_1(x_1, x_2) \geqslant K = \min_{x_2 \in X_2} \max_{x_1 \in X_1} f_1(x_1, x_2);$$

$$\mathcal{D} = \{(x_1, x_2) / f_2(x_1, x_2) > L\};$$

$$K_0 = \begin{cases} \sup\limits_{(x_1, x_2) \in \mathcal{D}} f_1(x_1, x_2), & \mathcal{D} \neq \phi; \\ -\infty, & \mathcal{D} = \phi. \end{cases}$$

Пусть $\tilde{x}_1^a$ и $\tilde{x}_1^*$ реализуют соответственно

$$\max_{x_1 \in X_1} f_1(x_1, x_2) = f_1[x_1^a(x_2), x_2] = f_1(\tilde{x}_1^a, x_2);$$

$$\min_{x_1 \in X_1} f_2(x_1, x_2) = f_2[x_1^*(x_2), x_2] = f_2(\tilde{x}_1^*, x_2).$$

Далее пусть

$$\tilde{x}_1^0 = \begin{cases} x_1^0 & \text{при} \quad x_2 = x_2^0; \\ \tilde{x}_1^* & \text{при} \quad x_2 \neq x_2^0, \end{cases}$$

если в $\mathscr{D}$ существует $f_1(x_1^0, x_2^0) = K_0$; если же $f_1(x_1^\varepsilon, x_2^\varepsilon) > K_0 - \varepsilon \neq -\infty$, то пусть

$$\tilde{x}_1^\varepsilon = \begin{cases} x_1^\varepsilon & \text{при} \quad x_2 = x_2^\varepsilon; \\ \tilde{x}_1^* & \text{при} \quad x_2 \neq x_2^\varepsilon. \end{cases}$$

Наконец,

$$\tilde{x}_1^{**} = \begin{cases} \tilde{x}_1^\alpha & \text{при} \quad x_2 \in E_2; \\ \tilde{x}_1^* & \text{при} \quad x_2 \notin E_2. \end{cases}$$

Теорема. 1) *В сформулированных условиях оптимальный гарантированный результат первого игрока равен* $\max[K_0; M]$.

2) *Если $K_0 \geqslant M$ и существует (x_1^0, x_2^0), то $\tilde{x}_1^0$ является оптимальной стратегией первого игрока. При $K_0 > M$ для любого ε существует ε-оптимальная стратегия $\tilde{x}_1^\varepsilon$; это же справедливо и при $K_0 = M$, если для любого ε существует $(x_1^\varepsilon, x_2^\varepsilon) \in \mathscr{D}$.*

3) *При $M \geqslant K_0$ оптимальна стратегия $\tilde{x}_1^{**}$, а при $M = K \geqslant K_0$ и стратегия $\tilde{x}_1^\alpha$, не требующая для своего определения знания $f_2(x_1, x_2)$.*

Доказательство. Применение $\tilde{x}_1^0$ гарантирует получение $K_0 \neq \neq -\infty$, так как второй игрок, осведомленный о выборе $\tilde{x}_1^0$, неизбежно выберет x_2^0, единственно обеспечивающую, в силу определения $\mathscr{D}$, $\max\limits_{x_2 \in X_2} f_2(\tilde{x}_1^0, x_2)$. Аналогично обстоит дело и со стратегией $\tilde{x}_1^\varepsilon$.

Если иная стратегия $\tilde{x}_1$ такова, что множество $A(\tilde{x}_1)$ точек $[x_1(x_2); x_2]$ не имеет пересечения с $\mathscr{D}$, то если даже второй игрок будет выбирать по своему произволу только одну из точек E_2, это гарантирует первому лишь M.

При $A(\tilde{x}_1) \cap \mathscr{D} \neq \phi$ второй игрок выберет, конечно, одну из точек этого пересечения, но тогда $f_1[x_1(x_2); x_2] \leqslant K_0$.

Суммируя сказанное, при $K_0 \geqslant M$ убеждаемся в справедливости второго утверждения.

При $K_0 \leqslant M$ применение $\tilde{x}_1^{**}$ гарантирует использование вторым игроком только точек из E_2, а, значит, и результат M для первой стороны. В то же время и любая другая стратегия не обещает большего или из-за $K_0 \leqslant M$ при $A(\tilde{x}_1) \cap \mathscr{D} \neq \phi$ или не предохраняет от возможности применения вторым игроком любой из точек $\tilde{x}_2 \in E_2$, если $A(\tilde{x}_1) \cap \mathscr{D} = \phi$.

Наконец, при $K_0 \leqslant K = M$ стратегия $\tilde{x}_1^\alpha$, очевидно, гарантирует тот же результат, что и $\tilde{x}_1^{**}$. Утверждение 1) теперь также очевидно.

Замечания. 1) Результат, аналогичный K_0, гарантирован и в случае, когда $w_2 = f_2(x_1, x_2, \alpha)$, причем первому игроку известно лишь, что $\alpha \in E$. В этом случае нужно только принять

$$\max_{\alpha \in E} f_2(\tilde{x}_1^*, x_2, \alpha) = \min_{x_1 \in X_1} \max_{\alpha \in E} f_2(x_1, x_2, \alpha);$$

$$\mathscr{D} = \{(x_1, x_2) / f_2(x_1, x_2, \alpha) > L, \quad \alpha \in E\};$$

$$L = \max_{x_2 \in X_2} \min_{x_1 \in X_1} \max_{\alpha} f(x_1, x_2, \alpha).$$

В определенных условиях K_0 снова будет и оптимальным результатом.

Уменьшение области $\mathscr{D}$ при увеличении L по сравнению с точно известным α создает тенденцию уменьшения гарантированного результата первого игрока и увеличения результата второго; это означает, что второму игроку в определенных пределах выгодно мешать точному знанию его настоящих интересов.

2) Увеличение оптимального гарантированного результата первого игрока можно ожидать, если бы ему заранее стало известно, что второй игрок по некоторым мотивам будет использовать только часть E_2' множества E_2, так как при этом увеличится M. Но тогда неизменны L, $\mathscr{D}$, K и лишь пропадает возможность использования $\tilde{x}_1^0$, $\tilde{x}_1^\varepsilon$ и уменьшится область

использования $\tilde{x}_1^*$ (самой по себе и в $\tilde{x}_1^{**}$), что невыгодно для второго игрока, поскольку может лишь уменьшить область получения им результата, большего L (при использовании $\tilde{x}_1^{**}$) при неизменности (x_1^*, x_2^*).

Таким образом, второму игроку нет смысла уменьшать размеры E_2 в глазах первой стороны и, следовательно, следует хранить в секрете способ конкретного выбора $\bar{x}_2$ (само значение $\bar{x}_2$ будет тогда известно первой стороне уже после выбора своей стратегии $\tilde{x}_1$).

3) В теореме не использовалась непрерывность $\tilde{x}_1$. Если же пользоваться ε-оптимальными стратегиями, аналогичными $\tilde{x}_1^*$ и $\tilde{x}_1^{**}$, то не требуется и непрерывность $f_1(x_1, x_2)$. Отказ от непрерывности f_2 возможен при сохранении существования E_2 и $\tilde{x}_1^*$ или же при изменении этих понятий с помощью соответственно точностей ε_1 и ε_2, назначаемых вторым и первым игроками, но так, что величина ε_2 известна и первому игроку.

4) Случай $K_0 > M$ можно, по-видимому, считать случаем, когда интересы второго игрока достаточно близки к интересам первого, ибо здесь оба игрока получают соответственно больше K и L. При $\max[K_0, K] < M$ второй игрок не может получить больше L, но соответственно и первый не может гарантированно получить больше M; это средний случай соотношения интересов. Если $K = M > K_0$, то никто из игроков не гарантирован от получения только K и L, т. е. от результатов, которые они получают и при противоположности интересов.

Вычислительный центр
Академии наук СССР
Москва

Поступило
10 XII 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] John Nasch, Ann. Math., 54, № 2 (1951); русск. пер. в сборн. Матричные игры, М., 1961. [2] Ю. Б. Гермейер, Методологические и математические основы исследования операции и теории игр. Препринт ВЦ МГУ, 1967. [3] В. А. Горелик, Принцип гарантированного результата в неантагонистических играх двух лиц с обменом информацией. Исследование операции, в. 2, М., 1971. [4] Ю. Б. Гермейер, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., 9, в. 3 (1969).