Доклады Академии наук СССР
1971. Том 198, № 5

УДК 517.544 *МАТЕМАТИКА*

О. П. ДЗАГНИДЗЕ

О НЕКОТОРЫХ ГРАНИЧНЫХ СВОЙСТВАХ ФУНКЦИЙ, ГАРМОНИЧЕСКИХ В ШАРЕ

(Представлено академиком Н. И. Мусхелишвили 4 I 1971)

В статье приводятся некоторые результаты, относящиеся к граничным свойствам гармонических в шаре функций. Для плоского случая аналогичные вопросы изучены в работах ([1-7]).

Пусть ρ, θ, φ — сферические координаты точки $Q=(x, y, t)$ 3-мерного эвклидова пространства, $x=\rho\sin\theta\cos\varphi$, $y=\rho\sin\theta\sin\varphi$, $t=\rho\cos\theta$. Пусть, далее $S_r=\{(\rho,\theta,\varphi)\colon 0\leqslant\rho<r,\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi\}$, где $0<r\leqslant\infty$; $T=\{(\theta,\varphi)\colon 0\leqslant\theta\leqslant\pi,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi\}$ и $H(S_r)$ $[C(S_r)]$ — множество всех действительных функций, гармонических (непрерывных) в открытом шаре S_r.

Пусть $F\subset[a, b]$ — замкнутое нигде не плотное множество. Обозначим через $M(x,\varepsilon)$, $x\in F$, $\varepsilon>0$, множество тех смежных интервалов множества F, которые целиком лежат в интервале $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$. Пусть $\lambda(x, \varepsilon)=\max\limits_{I\in M(x,\varepsilon)}|I|$. Мы скажем, что замкнутое нигде не плотное множество $F\subset[a, b]$ входит в класс $n(p,\mu,a,b)$, где $p>1$, $0\leqslant\mu<b-a$, если $|F|=\mu$ и для любого $x\in F$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lambda(x,\varepsilon)/\varepsilon^p=\infty.$$

Через $N(p, a, b)$ будем обозначать класс множеств, представимых в виде предела возрастающей последовательности множеств, принадлежащих $n(p,\mu_k,a,b)$, $\mu_k\to b-a$. Непустота этих классов доказана в ([8]).

Теорема 1. *Пусть $g\in C(S_r)$ и $e\in N(3, 0, 2\pi)$.*

Тогда существует функция $h\in H(S_r)$ такая, что для любого $\varphi\in e$

$$\lim_{\rho\to r}[h(\rho,\theta,\varphi)-g(\rho,\theta,\varphi)]=0$$

равномерно относительно $\theta\in[0,\pi]$.

Теорема 2. *Пусть $g\in C(S_r)$ и $e\in n(3,\mu,0,2\pi)$.*

Тогда для всякой непрерывной функции $\varepsilon(\rho)>0$, $0\leqslant\rho<r$, существует функция $h\in H(S_r)$ такая, что

$$|h(\rho,\theta,\varphi)-g(\rho,\theta,\varphi)|<\varepsilon(\rho)$$

при $0\leqslant\rho<r$, $\theta\in[0,\pi]$, $\varphi\in e$.

Известно ([9]), что если функция $h\in H(S_1)$ и ограничена на множестве $E\subset S_1$ полной меры, то она имеет радиальный предел почти во всех точках единичной сферы. Следующая теорема показывает, что требование полноты меры существенно.

Теорема 3. *Для любого множества $e\in n(3,\mu,0,2\pi)$ существует ограниченная на множестве $G=\{(\rho,\theta,\varphi)\colon 0\leqslant\rho<1,\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi,\ \varphi\in e\}$ функция $h\in H(S_1)$, у которой нет радиального предела ни в одной точке единичной сферы.*

Каждому множеству $e\in N(3, 0, 2\pi)$ поставим в соответствие множество $E=\{(1,\theta,\varphi)\colon 0\leqslant\theta\leqslant\pi,\ \varphi\in e\}$ на единичной сфере.

Теорема 4. *Пусть дана функция* $f(1, \theta, \varphi)$, $(1, \theta, \varphi) \in E$. *Для существования функции* $h \in H(S_1)$ *со свойством*

$$\lim_{\rho\to 1} h(\rho, \theta, \varphi) = f(1, \theta, \varphi), \quad (1, \theta, \varphi) \in E,$$

необходимо и достаточно, чтобы f *принадлежала первому классу Бэра на множестве* E.

Отметим некоторые следствия теорем 1, 2.

Теорема 5. *Если для* $h \in H(S_1)$ *существует* $\lim_{\rho\to 1} h(\rho, \theta, \varphi)$ *почти во всех точках* $(\theta, \varphi) \in T$, *то* $h = h_1 - h_2$, *где* $h_k \in H(S_1)$ *и* $\lim_{\rho\to 1} h_k(\rho, \theta, \varphi) \geqslant \geqslant 0$ *почти для всех* $(\theta, \varphi) \in T$ $(k = 1, 2)$.

Теорема 6. *Для всякой измеримой на* T *функции* f *(не обязательно конечной почти всюду) существует функция* $h \in H(S_1)$ *такая, что*

$$\lim_{\rho\to 1} h(\rho, \theta, \varphi) = f(\theta, \varphi)$$

почти для всех $(\theta, \varphi) \in T$.

Для функции, конечной почти всюду на T, имеет место более сильное утверждение ([10]).

Теорема 7. *Для всякой непрерывной на плоскости* $\{(x, y, t) : t = 0\}$ *функции* $f(x, y)$ *существует гармоническая в полупространстве* $t > 0$ *функция* h *такая, что* $h(x, y, t) \to f(x_0, y_0)$ *при* $(x, y, t) \to (x_0, y_0, 0)$.

Эта теорема при дополнительном предположении об ограниченности функции f хорошо известна ([11]).

В теоремах 1 — 4 описывается поведение гармонической функции вдоль полукруга. Справедливы также теоремы, аналогичные теоремам 1 — 4, касающиеся поведения гармонических функций вдоль конуса. Например, справедлива

Теорема 1′. *Пусть* $g \in C(S_r)$ *и* $e \in N(3, 0, \pi)$.

Тогда существует функция $h \in H(S_r)$ *такая, что для любого* $\theta \in e$

$$\lim_{\rho\to r} [h(\rho, \theta, \varphi) - g(\rho, \theta, \varphi)] = 0$$

равномерно относительно $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Соответствующие теоремы имеют место для m-мерного $(m > 3)$ эвклидова пространства.

Тбилисский математический институт
им. А. М. Размадзе
Академии наук ГрузССР

Поступило
25 XII 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] T. Carleman, Ark. Matematik, Astron. Fys., 20B, № 4, 1—5 (1927). [2] A. Roth, Comm. Math. Helv., 11, 77 (1938). [3] F. Bagemihl, W. Seidel, Math. Zs., 61, № 2, 186 (1954). [4] W. Rudin, Bull. Am. Math. Soc., 60, № 6, 545 (1954). [5] F. Bagemihl, W. Seidel, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 41, № 10, 740 (1955). [6] O. Lehto, Ann. Acad. Sci. Fenn., A1, 210 (1955). [7] R. Nevanlinna, Ann. Acad. Sci. Fenn., A1, 4 (1925). [8] О. П. Дзагнидзе, Сообщ. АН ГрузССР, 60, № 2, 289 (1970). [9] И. И. Привалов, Матем. сборн., 3 (45), № 1, 3 (1938). [10] С. Б. Топурия, Сообщ. АН ГрузССР, 55, № 1, 25 (1969). [11] С. Л. Соболев, Уравнения математической физики, М., 1966.