Доклады Академии наук СССР
1971. Том 198, № 5

УДК 518.61 *МАТЕМАТИКА*

Е. Г. ДЬЯКОНОВ

О НЕКОТОРЫХ ОПЕРАТОРНЫХ НЕРАВЕНСТВАХ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯХ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 21 IV 1970)

В настоящей работе на основе некоторых неравенств между дифференциальными сильно эллиптическими ([1–3]) операторами (д.с. э.о.) при краевых условиях типа Дирихле устанавливаются аналогичные неравенства между их проекционно-разностными аппроксимациями (([4–6]) и др.). Подобные неравенства полезны, например, при исследовании корректности дискретных аналогов краевых задач (([4, 6–10]) и др.), при построении итерационных методов для отыскания их решений (([11–15]) и др.), а также при исследовании разностных схем для некоторых нестационарных задач ([7, 16–19]). В частности, полученные неравенства для проекционно-разностных схем ([4–6]) позволяют применять итерационные методы типа ([3, 11, 12, 14]) с той же эффективностью, что и для обычных разностных схем.

1. Пусть Ω — ограниченная область в пространстве $E^{(n)} \equiv \{x\colon x \equiv (x_1, \ldots, x_n)\}$, для которой справедливы теоремы вложения С. Л. Соболева ([7]), Γ — ее граница, $\bar\Omega \equiv \Omega \cup \Gamma$; $C_N(\Omega)$ — пространство N-мерных вещественных вектор-функций $u \equiv (u_1(x), \ldots, u_N(x))$ с бесконечно дифференцируемыми компонентами и носителем, принадлежащим Ω, $\bar m \equiv (m_1, \ldots, m_N)$, $\bar m' \equiv (m_1', \ldots, m_N')$, $m_k' \leqslant m_k$, $1 \leqslant k \leqslant N$, где m_k и m_k' — целые числа, $m_k \geqslant 1$,

$$D_s \equiv \partial/\partial x_s, \quad D^\alpha \equiv D_1^{\alpha_1}\ldots D_n^{\alpha_n}, \quad \alpha \equiv (\alpha_1, \ldots, \alpha_n),$$

$$Bu \equiv \Big((-1)^{m_1}\sum_{s=1}^{n} D_s^{2m_1}u_1, \ldots, (-1)^{m_N}\sum_{s=1}^{n} D_s^{2m_N}u_N\Big)'; \tag{1}$$

$$Lu \equiv ((Lu)_1, \ldots, (Lu)_N)', \quad (Lu)_r \equiv \sum_{|\alpha|\leqslant m_r}(-1)^{|\alpha|}\sum_{l=1}^{N}\sum_{|\beta|\leqslant m_l} D^\alpha(a_{r,l,\alpha,\beta}D^\beta u_l);\,^* \tag{2}$$

$$\Lambda u \equiv ((\Lambda u)_1, \ldots, (\Lambda u)_N)', \quad (\Lambda u)_r \equiv \sum_{|\alpha|\leqslant m_r'}(-1)^{|\alpha|}\sum_{l=1}^{N}\sum_{|\beta|\leqslant m_l'} D^\alpha(b_{r,l,\alpha,\beta}D^\beta u_l); \tag{3}$$

L^* — оператор, формально сопряженный к L, $L_c \equiv {}^1/_2(L + L^*)$,

$$L_k \equiv {}^1/_2(L - L^*), \quad (u, v) \equiv \sum_{r=1}^{N}(u_r, v_r), \ (u_r, v_r) = \int_\Omega u_r(x)\,v_r(x)\,dx,$$

$$\|u\|^2 = (u, u), \quad \|u_r\|^2 \equiv (u_r, u_r);$$

$$b_L(u, v) \equiv \Sigma'(a_{r,l,\alpha,\beta}D^\beta u_l, D^\alpha v_r), \quad b_L'(u, v) \equiv \Sigma'(a_{r,l,\alpha,\beta}'D^\beta u_l, D^\alpha v_r), \tag{4}$$

где $\Sigma' \equiv \sum\limits_{r=1}^{N}\sum\limits_{l=1}^{N}\sum\limits_{|\alpha|\leqslant m_r}\sum\limits_{|\beta|\leqslant m_l}$;

$$|a - a'| \equiv \max_{r,l,\alpha,\beta}\{\sup|a_{r,l,\alpha,\beta}(x) - a_{r,l,\alpha,\beta}'(x)|\} \leqslant \varepsilon_L. \tag{5}$$

---

* Все коэффициенты ради краткости изложения считаем вещественными функциями x. Модификация приводимых ниже теорем на случай комплекснозначных пространств не представляет особого труда.

Через $W_{\overline{m}}$ обозначим замыкание $C_N{}^0(\Omega)$ в норме $\|u\|^2_{\overline{m}} = \sum_{r=1}^{N} \sum_{|\alpha|\leqslant m_r} \|D^\alpha u_r\|^2$, через $W_{-\overline{m}}$ — пространство, сопряженное к $W_{\overline{m}}$. Коэффициенты в (2), (3) считаем непрерывными или даже кусочно-непрерывными, лишь бы слабые расширения L и Λ могли рассматриваться как ограниченные операторы из $W_{\overline{m}}$ ($W_{\overline{m}'}$) в $W_{-\overline{m}}$ ($W_{-\overline{m}'}$), и предположим, что

$$b_L(u, u) \geqslant \delta_L \|u\|^2_{\overline{m}}, \quad b_\Lambda(u, u) \geqslant \delta_\Lambda \|u\|^2_{\overline{m}'}, \quad \delta_L > 0, \quad \delta_\Lambda > 0; \tag{6}$$

$$b_{r, l, \alpha, \beta} = b_{l, r, \beta, \alpha}, \quad b'_{r, l, \alpha, \beta} = b'_{l, r, \beta, \alpha}. \tag{7}$$

Взяв за основу пространство комплекснозначных функций $\tilde{u}$ и повторяя те же построения, что и выше, определим $\tilde{W}_{\overline{m}}$ и $\tilde{b}_L(\tilde{u}, \tilde{v})$ $(\tilde{u} \in \tilde{W}_{\overline{m}}$ $\tilde{v} \in \in \tilde{W}_{\overline{m}})$, подразумевая, конечно, что $(u_r v_r) = \int\limits_\Omega u_r \bar{v}_r \, dx$.

2. Пусть для каждого натурального числа K указывается система линейно независимых вектор-функций $\psi_k(x) \in W_{\overline{m}}$, $k = 1, 2, \ldots, K$, вообще говоря, зависящих от K, и оператору L ставится в соответствие матрица $\hat{L}'$ K-го порядка с элементами $a_{ls} = b_{L'}(\psi_s, \psi_l)$ (см. [4]), симметрическую и кососимметрическую части которой обозначим через $\hat{L}_c'$ и $\hat{L}_k'$.

Лемма 1.

$$(\hat{L}'a, a)_K = b_{L'}(u, u), \quad \hat{L}_c' = (b_{L_c'}(\psi_l, \psi_s)), \quad \hat{L}_k' = (b_{L_k'}(\psi_l, \psi_s)),$$

где

$$a \equiv (a_1, \ldots, a_K), \quad (a, b)_K \equiv \sum_{r=1}^{K} a_r b_r, \quad u \equiv \sum_{r=1}^{K} a_r \psi_r.$$

Условимся в дальнейшем через k_r обозначать неотрицательные константы, зависящие только от Ω, $\overline{m}$, $\overline{m}'$.

Теорема 1. *Пусть*

$$b_{L_c}(u, u) \geqslant \sigma b_\Lambda(u, u), \quad u \in W_{\overline{m}}, \quad \sigma > 0; \tag{8}$$

выполнено условие (5) *и*

$$|b - b'| \leqslant \varepsilon_\Lambda. \tag{9}$$

Тогда можно указать k_1 и k_2 такие, что

$$\hat{L}_c' \geqslant \sigma\hat{\Lambda} - (k_1\varepsilon_L + k_2\varepsilon_\Lambda\sigma)\,\hat{B}. \tag{10}$$

Лемма 2. *Пусть $\overline{m}' = \overline{m}$ и для Λ выполнено* (6).

Тогда можно указать $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 \geqslant 0$, зависящие от Ω и коэффициентов в (2), (3), *такие, что на $W_{\overline{m}}$ справедливы неравенства*

$$L_c \leqslant \sigma_1\Lambda, \quad -L_k\Lambda^{-1}L_k \leqslant \sigma_2\Lambda. \tag{11}$$

Лемма 2. *Пусть $\overline{m}' = \overline{m}$ и для Λ выполнено* (6).

Тогда можно указать $\sigma > 0$, зависящую от $b_{r, l, \alpha, \beta}$, что для любой функции $u \in W_m$ имеет место неравенство

$$b_\Lambda'(u, u) \geqslant \delta' b_B(u, u), \quad \delta' = \delta_\Lambda - \varepsilon_\Lambda\sigma. \tag{12}$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия леммы* 3, *в* (12) $\delta' > 0$, *справедливы* (5), (7) *и для всех $\tilde{u} \in \tilde{W}_{\overline{m}}$*

$$|\tilde{b}_{L_k}(\tilde{u}, \tilde{u})| \leqslant \sigma_2 \tilde{b}_\Lambda(\tilde{u}, \tilde{u}).$$

Тогда можно указать k_3, что

$$-\hat{L}_k'(\hat{\Lambda}')^{-1}L_k' \leqslant [\sigma_2(1+\varepsilon_\Lambda k_3(\delta')^{-1})+\varepsilon_L k_3(\delta')^{-1}]\,\hat{\Lambda}'. \tag{13}$$

3. Для построения разностных аппроксимаций используем обозначения h, i, $x_i \equiv (i_1h_1, \ldots, i_nh_n)$, $\bar{\partial}_s$, ∂_s, $\bar{\partial}^\alpha$, ∂^β из ([11]), и пусть $m_{r,s} \equiv \max\limits_{\alpha,\beta,l}\{\alpha_s, \beta_s\}$, где α, β, l соответствуют коэффициентам $a_{r,l,\alpha,\beta}$, не тождественно равным нулю, $\pi_{i,r} \equiv \{x: \quad x_s - i_sh_s| \leqslant m_{r,s},\ 1 \leqslant s \leqslant n\}$, $\dot{\Omega}_r \equiv \{x_i:\ \pi_{i,r} \subseteq \bar{\Omega}\}$, $\dot{H}$ — гильбертово пространство вектор-функций $\dot{u}$, r-е компоненты которых определены на Ω_r,

$$(\dot{u}, \dot{v})_{\dot{H}} \equiv (\dot{u}, \dot{v}) \equiv \sum_{r=1}^{N}(\dot{u}_r, \dot{v}_r) \equiv \hbar \sum_{r=1}^{N}\sum_{x_i \in \dot{\Omega}_r}\dot{u}_r(x_i)\,\dot{v}_r(x_i), \quad \hbar \equiv h_1h_2\ldots h_n, \tag{14}$$

операторы $\dot{B}$, $\dot{L}$, $\dot{\Lambda}$ отображают $\dot{H}$ в $\dot{H}$ при помощи формул, получаемых из (1) — (3) заменой $D^\alpha(aD^\beta)$ на $^1/_2\{\bar{\partial}^\alpha(a\partial^\beta) + \partial^\alpha(a\bar{\partial}^\beta)\}$, и всюду в дальнейшем подразумеваемого финитного продолжения $\dot{u}$ на остальные узлы сетки; симметрические и кососимметрические части оператора $\dot{L}$ в $\dot{H}$ обозначим $\dot{L}_c$ и $\dot{L}_k$ соответственно; очевидно, что $\dot{B} = \dot{B}_c > 0$, $\dot{\Lambda} = \dot{\Lambda}_c$.

Число λ_k называем собственным числом задачи (L, Λ) (см. ([7])), если существует $u^{(k)} \in W_{\bar{m}}$ такое, что при всех $v \in W_{\bar{m}}$ имеет место

$$b_{L_c}(u^{(k)}, v) = \lambda_k b_\Lambda(u^{(k)}, v). \tag{15}$$

При $|\bar{m}'| \equiv \sum\limits_{r=1}^{N} m_r' < |\bar{m}|$ в силу (6), учитывая кратность λ_k, можно записать

$$0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots; \qquad b_\Lambda(u^{(k)}, u^{(l)}) = \delta_{k,l} \tag{16}$$

Теорема 3. *Пусть $\dot{L}_c \geqslant \delta\dot{B}$, $\delta > 0$, $|\bar{m}'| < |\bar{m}|$ и собственные числа задачи $\dot{L}_c\dot{u} = \lambda\dot{\Lambda}\dot{u}$ расположены в порядке возрастания, учитывая их кратность: $\dot{\lambda}_1 \leqslant \dot{\lambda}_2 \leqslant \ldots$, $\dot{L}_c\dot{u}^{(k)} = \dot{\lambda}\dot{\Lambda}\dot{u}^{(k)}$, $(\dot{\Lambda}u^{(k)}, u^{(l)} = \delta_{k,l}$.*

Тогда при фиксированном k и $|h| \equiv \max\limits_s h_s \to 0$ из $\{h\}$ можно выделить последовательность такую, что

$$\lim_{|h|\to 0}\dot{\lambda}_k = \lambda_k, \quad \|D^\alpha u_r^{(k)} - \dot{p}\partial^\alpha\dot{u}_r^{(k)}\| \to 0\ (|\alpha| \leqslant m_r - 1),$$
$$\dot{p}\partial^\alpha u_r^{(k)} \rightharpoonup D^\alpha u_r^{(k)}\ (|\alpha| = m_r); \tag{17}$$

если главная часть $b_L(u, u)$ положительно определена относительно старших производных, то

$$\|D^\alpha u_r^{(k)} - \dot{p}\partial^\alpha\dot{u}_r^{(k)}\| \to 0 \text{ и при } |\alpha| = m_r;$$

если все $m_r = 1$ и оператор L имеет вид

$$Lu = -\sum_{r=1}^{n} D_r(a_rD_ru) + \sum_{r=1}^{n} b_rD_ru + cu,$$

то

$$\|u_r^{(k)} - \dot{p}_1u_r^{(k)}\|_{W_2(1)} \to 0,$$

где $\dot{p}_1\dot{u}_r^{(k)}$ — симплициальное восполнение (см. ([5])) сеточной функции $\dot{u}_r^{(k)}$.

4. Пусть $\chi_s(x_s)$ обозначает характеристическую функцию отрезка $0 \leqslant x_s \leqslant 1$, а ψ^{m_r} — ее m_r-ю степень свертки с самой же $\chi_s(x_s)$ ([4, 5]),

$$\psi_s^{m_r}(x) \equiv \prod_{s=1}^{n}\psi_s^{m_r}(x_s),$$

$$\psi_i^{(m_r)}(x) \equiv \psi^{(m_r)}\left(\left(x_1 - \left(i_1 - \frac{m_r+1}{2}\right)\right)h_1^{-1}, \ldots, \left(x_n - \left(i_n - \frac{m_r+1}{2}\right)\right)h_n^{-1}\right).$$

Возьмем в п. 2 $\psi_k\ (x) \equiv (0, \ldots, 0, \psi_i^{(m_r)}, 0, \ldots, 0)$, $x_i \in \dot{\Omega}_r$, $1 \leqslant r \leqslant N$, и рассмотрим $\hat{L}$ $\hat{L}'$, $\hat{\Lambda}$, $\hat{\Lambda}'$, $\hat{B}$, $\hat{R}_s$, где $\hat{L}' \equiv h^{-1}(b_{L'}(\psi_l, \psi_s))$, $R_s \equiv (-1)^p D_s^{2p}$, а в качестве $a'_{r,l,\alpha,\beta}$ на каждой ячейке сетки берутся, например, некоторые значения $a_{r,l,\alpha,\beta}$ из этой ячейки.

Лемма 4. *Если $p > 1$, то $\hat{R}_s\hat{R}_l \neq \hat{R}_l\hat{R}_s$ $(s \neq l)$ даже в случае, когда*

$$\Omega \equiv \{x\colon 0 \leqslant x_s \leqslant l_s,\ 1 \leqslant s \leqslant n\}. \tag{18}$$

Теорема 4. *Если $\Lambda = B$ и выполнены неравенства* (11) *и* $\hat{L}_c \geqslant \sigma B$, $\sigma > 0$, то существуют $\hat{\sigma}_2 \geqslant 0$, $\hat{\sigma}_1 \geqslant \hat{\sigma}_0 > 0$, не зависящие от h, такие, что

$$\hat{\sigma}_0 \dot{B} \leqslant \hat{L}_c' \leqslant \hat{\sigma}_1 \dot{B}, \quad -\hat{L}_h' \dot{B}^{-1} \hat{L}_h' \leqslant \hat{\sigma}_2 \dot{B}. \tag{19}$$

Теорема 5. *Пусть $|\bar{m}'| < |\bar{m}|$, для Λ выполнены условия* (6), (9), (12) *с $\delta' > 0$ и $\varepsilon_L \to 0$, $\varepsilon_\Lambda \to 0$ при $|h| \to 0$.*

Тогда существует $\{h\}$ с $|h| \to 0$ такое, что при фиксированном k

$$\lim_{|h| \to 0} \hat{\lambda}_{k,h} = \lambda_k, \quad \lim_{|h| \to 0} \|\hat{u}^{(k)} - u^{(k)}\|_{\bar{m}} = 0,$$

где $\hat{\lambda}_{k,h}$ — собственные числа задачи

$$\hat{L}_c' \hat{u}_h^{(k)} = \hat{\lambda}_{k,h} \hat{\Lambda}_k'; \quad \hat{\lambda}_{1,h} \leqslant \hat{\lambda}_{2,h} \leqslant \ldots, (\hat{\Lambda}' u_h^{(k)}, u_h^{(l)}) = \delta_{k,l}\ (l \leqslant k)$$

а $\hat{\lambda}_k$ и $\hat{u}^{(k)}$ определены из (15), (16).

При $m_r = 1$ представляется выгодным использовать проекционно-разностные аппроксимации, связанные с использованием кусочно-линейных функций $\psi_h(x)$ ([5] и др.), так как операторы $\hat{B}$ тогда совпадают с $\dot{B}$.

5. Замечания. 1) Приведенные выше неравенства работают и в случае нелинейных задач ([10, 11]), если под $\hat{L}(\dot{L})$ понимать производную Фреше от нелинейного оператора. 2) При подходящем видоизменении $b_L(u, v)$ основные результаты работы можно перенести и на случай более сложных краевых условий.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
11 III 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] L. Nirenberg, Comm. Pure and Appl. Math., 8, 648 (1955). [2] С. Г. Михлин, Численная реализация вариационных методов, «Наука», 1966. [3] Е. Г. Дьяконов, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., № 1, № 4 (1966). [4] J. P. Aubin, Annali Scuola Normale Superiori di Pisa, 21, 599 (1967). [5] Ю. К. Демьянович, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., 8, № 1 (1968). [6] P. G. Ciarlet, M. H. Schultz, R. S. Varga, Numer. Math., 13, № 1, 51 (1969). [7] О. А. Ладыженская, Смешанная задача для гиперболического уравнения, 1953. [8] В. К. Саульев, Вычислит. матем., № 1 (1957). [9] F. Stummel, Numer Math., 13, № 1, 51 (1969). [10] Е. Г. Дьяконов, ДАН, 198, № 3 (1971). [11] Е. Г. Дьяконов, ДАН, 188, № 5 (1969). [12] E. G. D'yakonov, J. Inst. Math. Appl., 7, № 1, 1 (1971). [13] М. И. Яковлев, Тр. матем. инст. им. В. А. Стеклова, 84 (1965). [14] А. А. Самарский, ДАН, 185, № 3 (1969). [15] Н. С. Бахвалов, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., 6, № 5 (1966). [16] О. А. Ладыженская, Матем. сборн., 45, в. 2 (1958). [17] Е. Г. Дьяконов. В сборн. Вычислит. методы и программирование, 6, 1967. [18] Е. Г. Дьяконов, ДАН, 176, № 2 (1967). [19] А. А. Самарский, ДАН, 181, № 4 (1968).