Доклады Академии наук СССР
1971. Том 199, № 5

УДК 512 *МАТЕМАТИКА*

К. Г. АГАБАБЯН

ОБ АЛГЕБРЕ НЕЙРОННЫХ МАТРИЦ

(Представлено академиком В. М. Глушковым 25 I 1971)

Рассматривается алгебра, в основу построения которой положены некоторые свойства сенсорных систем в смысле обработки информации ([2-5] и др.).

Вводятся понятия нейронных матриц и нейронных операторов. Элементами нейронных матриц являются выходные сигналы нейронов данного слоя. Полагается, что каждый слой состоит из нейронов одного типа, а сигналы между слоями распространяются только в одном направлении: от рецепторного поля к k-му слою.

Аксиоматически введем следующую функцию:

$$f_{ij}^{(k)} = \begin{cases} \lambda_k \left[a \sum\limits_{i=1}^{\mu_1} \sum\limits_{j=1}^{\mu_2} \int\limits_{t_0^{(k)}}^{t} (f_{ij}^{(m)} + \alpha f_{\beta\gamma}^{(n)})\, dt - p_k \right] & \text{при } a \sum\limits_{i=1}^{\mu_1} \sum\limits_{j=1}^{\mu_2} \int\limits_{t_0^{(k)}}^{t} (f_{ij}^{(m)} + \alpha f_{\beta\gamma}^{(n)})\, dt > p_k, \qquad (1^{а}) \\ 0 & \text{при } a \sum\limits_{i=1}^{\mu_1} \sum\limits_{j=1}^{\mu_2} \int\limits_{t_0^{(k)}}^{t} (f_{ij}^{(m)} + \alpha f_{\beta\gamma}^{(n)})\, dt \leqslant p_k, \qquad (1^{б}) \end{cases}$$

где $f_{ij}^{(k)}$ — выходной сигнал ij-го элемента k-го слоя, λ_k — коэффициент, p_k — порог, i — горизонтальная, а j — вертикальная координата, t — время. $i, j, k, \mu_1, \mu_2, m, n, \alpha, \beta, \gamma$ принимают целочисленные значения. Полагается, что $\delta_0^{(k)} \leqslant \delta^{(k)} \leqslant \delta_1^{(k)}$, где $\delta^{(k)} = t - t_0^{(k)}$. Верхний индекс употребляемого символа означает номер слоя.

Определение 1. **Рецептором** назовем элемент, который выполняет операцию (I) при $k = 1$, $a = 1$, $\mu_1 = \mu_2 = 1$, $\alpha = 0$, $f_{ij}^{(m)} = I(t)$, где $I(t)$ — входной сигнал рецептора.

Определение 2. **Рецепторным полем** назовем совокупность рецепторов, равномерно размещенную в двумерном пространстве в виде матрицы $M \times N$.

Определение 3. **Рецептивным полем** назовем компактную совокупность элементов k-го слоя, выходы которых соединены с одним элементом n-го слоя.

Определение 4. $\Gamma_0[\eta_1 \times \eta_2]$ — оператор, который разбивает любую заданную матрицу на блоки размера $\eta_1 \times \eta_2$ и выполняет с каждым блоком операцию (I) при $a = 1$, $\mu_1 = i_k\eta_1$, $\mu_2 = i_k\eta_2$, $\alpha = 0$, где $i_k = (i_{k+1} - 1)\eta_1 + 1$, $j_k = (j_{k+1} - 1)\eta_2 + 1$. При $\eta_1 = \eta_2 = \eta$ оператор будем писать в виде $\Gamma_0[\eta]$. Очевидно, что оператор $\Gamma_0[\eta_1 \times \eta_2]$ преобразует рецепторное поле в рецептивные поля.

Определение 5. $\Gamma_1[\mathrm{I}]$ — оператор, который выполняет операцию (I) над столбцами любой заданной матрицы при $a = 1$, $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = N$, $\alpha = 0$.

Модальностью оператора является $\Gamma_1[\vdash]$, где $\mu_1 = M$, $\mu_2 = 1$. N и M — вертикальный и горизонтальный размер матрицы соответственно.

Определение 6. $\Gamma_2[\overrightarrow{-}]$ — оператор, который выполняет операцию (I) над любой заданной матрицей при $a = 1$, $\mu_1 = \mu_2 = 1$, $m = n$, $\alpha = -1$, $\beta = i + 1$, $\gamma = j$.

Модальностями оператора являются $\Gamma_2[\overleftarrow{-}]$, $\Gamma_2[-]\uparrow$, $\Gamma_2[-]\downarrow$, где β и γ принимают значения $\beta = i - 1$, $\gamma = j$, $\beta = i$, $\gamma = j + 1$, $\beta = i$, $\gamma = j - 1$.

Определение 7. $\Gamma_3[+]$ — оператор, который выполняет операцию (I) над любыми двумя заданными матрицами одинакового размера при $a=1$, $\mu_1=\mu_2=1$, $m\neq n$, $\alpha=-1$, $\beta=i$, $\gamma=j$. Это операция сложения нейронных матриц.

Определение 8. $\Gamma_4\overline{[+]}$ — оператор, который выполняет операцию (I) над любой заданной матрицей при $a=1$, $\mu_1=\mu_2=1$, $m=n$, $\alpha=1$, $\beta=i+1$, $\gamma=j$.

Модальностью оператора является $\Gamma_4[+]|$, где $\beta=i$, $\gamma=j+1$. Здесь $\beta=i+1$ эквивалентен $\beta=i-1$, а $\gamma=j+1$ эквивалентен $\gamma=j-1$.

Определение 9. $\Gamma_5[-]$ — оператор, который выполняет операцию (I) над любыми двумя заданными матрицами одинакового размера при $a=1$, $\mu_1=\mu_2=1$, $m\neq n$, $\alpha=-1$, $\beta=i$, $\gamma=j$. Это операция вычитания нейронных матриц.

Определение 10. $\Gamma_6\overrightarrow{[+]}$ — оператор, который выполняет операцию (I) над любыми двумя заданными матрицами одинакового размера при $a=1$, $\mu_1=\mu_2=1$, $m\neq n$, $\alpha=1$, $\beta=i+1$, $\gamma+j$.

Модальностями оператора являются $\Gamma_6\overleftarrow{[+]}$, $\Gamma_6[+]\uparrow$, $\Gamma_6[+]\downarrow$, где β и γ принимают значения $\beta=i-1$, $\gamma=j$, $\beta=i$, $\gamma=j+1$, $\beta=i$, $\gamma=j-1$.

Определение 11. $\Gamma_7\overrightarrow{[-]}$ — оператор, который выполняет операцию (I) над любыми двумя заданными матрицами одинакового размера при $a=1$, $\mu_1=\mu_2=1$, $m\neq n$, $\alpha=-1$, $\beta=i+1$, $\gamma=j$.

Модальностями оператора являются $\Gamma_7\overleftarrow{[-]}$, $\Gamma_7[-]\uparrow$, $\Gamma_7[-]\downarrow$, где β и γ принимают значения $\beta=i-1$, $\gamma=j$, $\beta=i$, $\gamma=j+1$, $\beta=i$, $\gamma=j-1$.

Определение 12. $\Gamma_8\overrightarrow{[+]}'$ — оператор, который выполняет операцию (I) над любой заданной матрицей при $a=\varphi(v)$, $\mu_1=\mu_2=1$, $m=n$, $\alpha=1$, $\beta=i+1$, $\gamma=j$.

Модальностями оператора являются $\Gamma_8\overleftarrow{[+]}'$, $\Gamma_8[+]'\uparrow$, $\Gamma_8[+]'\downarrow$, где β и γ принимают значения $\beta=i-1$, $\gamma=j$, $\beta=i$, $\gamma=j+1$, $\beta=i$, $\gamma=j-1$. Здесь $\varphi(v)$ определяется следующим образом: $\varphi(v)=t_1-t_2$, $t_1=(l_1-l_0)/v_0$, $t_2=s_0/v$, отсюда

$$\varphi(v)=\frac{l_1-l_0}{v_0}\left(1-\frac{s_0}{l_1-l_0}\,\frac{v_0}{v}\right),$$

где s_0 — расстояние между элементами, от которых могут быть возбуждены входы нейрона, v — скорость движущегося по рецепторному полю образа, v_0 — скорость распространения возбуждения по входам нейрона l_0, l_1. Полагается, что $l_1>l_0$, где l_0 и l_1 — длины правого и левого входа нейрона, а $\varphi(v)$ удовлетворяет неравенству $0<\varphi(v)<t_1$.

Для группы операторов, где $a=\varphi(v)$, будем полагать $f_{ij}^{(m)}=\mathrm{const}$, $f_{\beta\gamma}^{(n)}=\mathrm{const}$, $t_0^{(k)}=0$, $t=1$.

Для операторов, где $a=1$, $\mu_1=\mu_2=1$, полагаем, что $l_0=l_1$, а для операторов $\Gamma_0[\eta_1\times\eta_2]$, $\Gamma_1[\mathrm{I}]$, $\Gamma_1[-]$: $l_0\leqslant l\leqslant l_1$, где l — длина ij-го входа.

Определение 13. $\Gamma_9\overrightarrow{[-]}''$ — оператор, который выполняет операцию (I) над любой заданной матрицей при $a=\varphi(v)$, $\mu_1=\mu_2=1$, $m=n$, $\alpha=-1$, $\beta=i+1$, $\gamma=j$. Модальностями оператора являются $\Gamma_9\overleftarrow{[-]}''$, $\Gamma_9[-]''\uparrow$, $\Gamma_9[-]''\downarrow$, где β и γ принимают значения $\beta=i-1$, $\gamma=j$, $\beta=i$, $\gamma=j+1$, $\beta=i$, $\gamma=j-1$.

Определение 14. $\Gamma_{10}\overrightarrow{[+]}'$ — оператор, который выполняет операцию (I) над любыми двумя заданными матрицами одинакового размера при $a=\varphi(v)$, $\mu_1=\mu_2=1$, $m\neq n$, $\alpha=1$, $\beta=i+1$, $\gamma=j$.

Модальностями оператора являются $\Gamma_{10}\overleftarrow{[+]}'$, $\Gamma_{10}[+]'\uparrow$, $\Gamma_{10}[+]'\downarrow$, где β и γ принимают значения $\beta=i-1$, $\gamma=j$, $\beta=i$, $\gamma=j+1$, $\beta=i$, $\gamma=j-1$.

Определение 15. $\Gamma_{11}\overrightarrow{[-]}''$ — оператор, который выполняет операцию (I) над любыми двумя заданными матрицами одинакового размера при $a=\varphi(v)$, $\mu_1=\mu_2=1$, $m\neq n$, $\alpha=-1$, $\beta=i+1$, $\gamma=j$.

Модальностями оператора являются $\Gamma_{11}[\overleftarrow{-}]''$, $\Gamma_{11}[-]''\uparrow$, $\Gamma_{11}[-]''\downarrow$, где β и γ принимают значения $\beta = i - 1$, $\gamma = j$, $\beta = i$, $\gamma = j + 1$, $\beta = i$, $\gamma = j - 1$.

Определение 16. $\Gamma_{12}[+]$ — оператор, который выполняет операцию (I) над любыми двумя заданными матрицами одинакового размера при $a = \varphi(v)$, $\mu_1 = \mu_2 = 1$, $m \neq n$, $\alpha = 1$, $\beta = i$, $\gamma = j$.

Определение 17. $\Gamma_{13}[-]$ — оператор, который выполняет операцию (I) над любыми двумя заданными матрицами одинакового размера при $a = \varphi(v)$ $\mu_1 = \mu_2 = 1$, $m \neq n$, $\alpha = -1$, $\beta = i$, $\gamma = j$.

Нетрудно видеть, что операции сложения и вычитания обычных матриц являются частными случаями сложения и вычитания нейронных матриц. Чтобы убедиться в этом, достаточно подставить в соответствующих выражениях $\lambda_k = 1$, $t_0^{(k)} = 0$, $t = 1$, $p_k = 0$, $f_{ij}^{(m)} = \mathrm{const}$, $\beta_{\beta\gamma}^{(n)} = \mathrm{const}$, а затем, заменяя $f_{ij}^{(k)} \to c_{ij}$, $f_{ij}^{(m)} \to a_{ij}$, $f_{\beta\gamma}^{(n)} \to b_{ij}$, получим: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ и $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$, т. е. $C = A + B$ и $C = A - B$.

При $\lambda_k = \lambda_k(t)$, $p_k = p_k(t)$ предлагаемая алгебра позволяет моделировать некоторые патологические свойства сенсорных систем.

Заметим, что для выполнения операции над нейронными матрицами вовсе не обязательно, чтобы нейронная матрица была прямоугольной формы. Она может иметь произвольную форму, состоящую из компактно расположенных элементов так, чтобы было возможно их упорядочение.

Рассмотрим некоторые элементарные свойства нейронных матриц.

Теорема 1. *Пусть* $\eta_1 \neq \eta_2$, $\Gamma_0[\eta_1 \times \eta_2](A) \neq \Gamma_0[\eta_2 \times \eta_1](A)$.

Теорема 2. $\Gamma_0[\mathrm{N} \times 1](A)$ *эквивалентно* $\Gamma_1[\mathrm{I}](A)$, *а* $\Gamma_0[1 \times M](A)$ *эквивалентно* $\Gamma_1[\ \mathrm{I}\ ](A)$.

Теорема 3. *Пусть* $A \in (\bar{A} \cup \bar{\bar{A}})$. *Имеют место соотношения*:

$$\Gamma_2[\overrightarrow{-}](A) = \bar{A}_1 \to, \quad \Gamma_2[\overleftarrow{-}](A) = \bar{A}_1 \leftarrow, \quad \Gamma_2[-]\uparrow(A) = \bar{A}_1\uparrow,$$
$$\Gamma_2[-]\downarrow(A) = \bar{A}_1\downarrow.$$

Здесь $\bar{A}$ — множество матриц, для элементов которых имеет место $f_{11}^{(k)} = f_{12}^{(k)} = \ldots = f_{MN}^{(k)} = 0$, а $\bar{\bar{A}}$ — множество матриц, для элементов которых имеет место $f_{11}^{(k)} = f_{12}^{(k)} = \ldots = f_{MN}^{(k)} \neq 0$.

Теорема 4. *Пусть* $\Gamma_2[\overrightarrow{-}](A) = A_1 \to$, *где* $A_1 \to \neq \bar{A}_1 \to$. *Имеет место следующее соотношение*: $\Gamma_2[\overrightarrow{-}](A_1 \to) \neq \bar{A}_2 \to$.

Теорема 5. $\Gamma_3[+](A, B) = \Gamma_3[+](B, A)$.

Теорема 6. *Пусть* $A \neq B$. $\Gamma_5[-](A, B) \neq \Gamma_5[-](B, A)$.

Рассмотрим варианты операторов

а) $a = 1$, $f_{ij}^{(m)} = \mathrm{const}$, $f_{\beta\gamma}^{(n)} = \mathrm{const}$, $t_0^{(k)} = 0$, $t = 1$, операторы будем писать в виде $\bar{\Gamma}_0[\eta]$, $\bar{\Gamma}_1[\mathrm{I}]$, $\bar{\Gamma}_2[-]$, $\bar{\Gamma}_3[+]$, $\bar{\Gamma}_4[+]$ и т. д.

б) Оценивается только абсолютная величина разности $f_{ij}^{(m)}$ и $f_{\beta\gamma}^{(n)}$. Операторы будем писать в виде $\Gamma_2[\overline{-}]$, $\Gamma_2[-]|$, $\Gamma_5[\overline{-}]$, $\Gamma_7[\overline{-}]$, $\Gamma_7[-]|$, $\Gamma_9[\overline{-}]''$, $\Gamma_9[-]''|$ и т. д. Для этого варианта $\beta = i + 1$ эквивалентен $\beta = i - 1$, а $\gamma = j + 1$ эквивалентен $\gamma = j - 1$.

в) Одновременно имеют место случаи а) и б). Операторы будем писать в виде $\bar{\Gamma}_2[\overline{-}]$, $\bar{\Gamma}_2[-]|$, $\bar{\Gamma}_5[\overline{-}]$, $\bar{\Gamma}_7[\overline{-}]$, $\bar{\Gamma}_7[-]|$ и т. д.

Некоторые свойства нейронных матриц рассматривались в ([1]). Кроме описания и анализа работы сенсорных систем, предлагаемая алгебра может быть применена также для решения класса задач, не относящихся к нейронным сетям.

Институт кибернетики
Академии наук УССР

Поступило
22 I 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] К. Г. Агабабян, Кандидатская диссертация, Киев, 1969. [2] А. Л. Бызов, Электрофизиологические исследования сетчатки, «Наука», 1966. [3] В. Д. Глезер, Механизмы опознания зрительных образов, «Наука», 1966. [4] Р. Гранит, Электрофизиологические исследования рецепции, ИЛ, 1957. [5] Теория связи в сенсорных системах, М., 1964.