Доклады Академии наук СССР
1971. Том 199, № 5

УДК 519.281

МАТЕМАТИКА

Л. В. АРХАРОВ

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ КОРНЕЙ ВЫБОРОЧНОЙ КОВАРИАЦИОННОЙ МАТРИЦЫ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 17 II 1971)

Пусть x_j^i, $1 \leqslant i \leqslant p$, $1 \leqslant j \leqslant n$,— независимые нормальные величины с нулевыми средними и единичными дисперсиями.

Обозначим $\sigma_{sr} = \sum_j x_j^s x_j^r$ элементы матрицы S_n размером $p \times p$.

Тогда S_n имеет распределение Уишарта с n степенями свободы. При $n \to \infty$ распределение матрицы $(S_n - nI) / \sqrt{n}$ сходится к распределению случайной матрицы Z, элементы которой z_{ij} независимы, нормальны и

$$Mz_{rs} = 0; \quad Dz_{rs} = 2, \quad \text{если } r = s; \quad Dz_{rs} = 1, \text{ если } r \neq s.$$

Пусть $\lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_p$ — корни уравнения $\|z - \lambda I\| = 0$, λ — случайный корень матрицы Z, т. е. $\lambda = \lambda_i$ с вероятностью $1/p$. В работе [1] установлена следующая теорема: *функция распределения величины* λ *при* $p \to \infty$ *сходится к функции* $\varphi(x)$, *где*

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant -2, \\ 1 & \text{при } x \geqslant 2, \\ \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-2}^{x} \sqrt{1 - \frac{u^2}{4}}\, du & \text{при } -2 \leqslant x \leqslant 2. \end{cases}$$

То же утверждение может быть сформулировано в другом виде:

$$\lim_{p \to \infty} \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{p} P\{\lambda_i < x\} = \varphi(x).$$

Цель настоящей работы — установить аналогичные теоремы для случайного корня $\lambda^{(n)}$ матрицы S_n и центральную предельную теорему для функций $A_\alpha = S_p[S_n^\alpha]$ для последовательностей $n(N)$ и $p(N)$, если члены хотя бы одной из этих последовательностей стремятся к бесконечности.

Теорема 1. *Если последовательности* $n(N)$ *и* $p(N)$ *такие, что* $\lim_{N \to \infty}(n(N) + p(N)) \to \infty$, $\lim_{N \to \infty} p(N) / n(N) = y$, $0 \leqslant y < \infty$, *то распределение случайной величины* $\lambda^{(n)} / n(N)$ *при* $N \to \infty$ *сходится к некоторому распределению* $F(x)$, *сосредоточенному на конечном отрезке, первые пять моментов которого*

$$\mu_1 = \int x\, dF(x) = 1, \quad \mu_2 = \int x^2\, dF(x) = 1 + y,$$

$$\mu_3 = \int x^3\, dF(x) = 1 + 3y + y^2, \quad \mu_4 = \int x^4\, dF(x) = 1 + 6y + 6y^2 + y^3,$$

$$\mu_5 = \int x^5\, dF(x) = 1 + 10y + 20y^2 + 10y^3 + y^4.$$

Примечание. Теорема остается в силе, если величины x_j^i, определяющие матрицу S_n, не являются нормальными; требуется лишь, чтобы $Mx_j^i = 0$ и существовали все моменты, причем, если $Dx_j^i = 1$, то предельная функция распределения та же $F(x)$.

Доказательство теоремы проводится методом моментов, а именно, изучением свойств суммы

$$pM(\lambda^{(n)})^\alpha = M \sum_{i_1 \dots i_\alpha} \sum_{j_1 \dots j_\alpha} G\begin{pmatrix} i_1 \dots i_\alpha \\ j_1 \dots j_\alpha \end{pmatrix},$$

где
$$G\begin{pmatrix} i_1 \dots i_\alpha \\ j_1 \dots j_\alpha \end{pmatrix} = x_{j_1}^{i_1} x_{j_2}^{i_1} x_{j_2}^{i_2} x_{j_3}^{i_2} \dots x_{j_\alpha}^{i_{\alpha-1}} x_{j_\alpha}^{i_\alpha} x_{j_1}^{i_\alpha}.$$

Лемма 1. *$pM(\lambda^{(n)})^\alpha = H_\alpha(n, p) + \Delta$, где $H_\alpha(n, p)$ — некоторый однородный многочлен степени $\alpha + 1$ относительно n и p, а Δ — меньшей степени. Причем, если $H_\alpha(n, p) = \sum_{u+w=\alpha+1} c_{uw} n^u p^w$, то для коэффициентов c_{uw} имеет место оценка*

$$c_{uw} \leqslant \alpha^u / u! \tag{1}$$

Доказательство леммы 1 проводится комбинаторными методами.

Из леммы 1 следует, что $M[\lambda_n / n(N)]^\alpha \to \sum_{u+w=\alpha+1} c_{uw} y^u = f_\alpha(y)$,

и из (1) получаем

$$f_\alpha(y) \leqslant [g(y)]^\alpha.$$

Поскольку $\lim_{N\to\infty} M[\lambda_n / n(N)]^\alpha \to f_\alpha(y)$, то существует распределение с моментами $f_\alpha(y)$, а так как ряд $\sum_m [f_{2m}(y)]^{1/2m}$ расходится, то моменты $f_\alpha(y)$ однозначно определяют некоторое распределение $F(x)$. В силу теоремы Фреше ([3] стр. 198) функция распределения величины $\lambda_n / n(N)$ сходится к $F(x)$. Поскольку $f_\alpha(y) \leqslant [g(y)]^\alpha$, то предельное распределение сосредоточено на конечном отрезке. Теорема 1 доказана.

Обозначим $A_k = \sum_i [\lambda_i^{(n)}]^k = \operatorname{Sp} S^k$.

Теорема 2. *Если $p(N)$, $n(N)$ такие, что $p(N) + n(N) \to \infty$, $\lim_{N\to\infty} p(N) / n(N) = y$, $0 \leqslant y < \infty$, то совместное распределение величин $\eta_1 = (A_1 - MA_1) / (n+p)^{1/2}$, $\eta_2 = (A_2 - MA_2) / (n+p)^{2/2}$, ..., $\eta_k = (A_k - MA_k) / (n+p)^{k/2}$ сходится к некоторому многомерному нормальному распределению.*

Доказательство проводится методом моментов, а именно, изучением свойств смешанного момента

$$B_{s_1 \dots s_k} = M(A_1 - MA_1)^{s_1} (A_2 - MA_2)^{s_2} \dots (A_k - MA_k)^{s_k} =$$
$$= M \sum_{i_1 \dots i_\alpha} \sum_{j_1 \dots j_\alpha} \left[G\begin{pmatrix} i_1 \\ j_1 \end{pmatrix} - MG\begin{pmatrix} i_1 \\ j_1 \end{pmatrix}\right] \times \left[G\begin{pmatrix} i_2 \\ j_2 \end{pmatrix} - MG\begin{pmatrix} i_2 \\ j_2 \end{pmatrix}\right] \times \dots$$
$$\dots \times \left[G\begin{pmatrix} i_{\alpha-s_k+1} \dots i_\alpha \\ j_{\alpha-s_k+1} \dots j_\alpha \end{pmatrix} - MG\begin{pmatrix} i_{\alpha-s_k+1} \dots i_\alpha \\ j_{\alpha-s_k+1} \dots j_\alpha \end{pmatrix}\right],$$

где $\alpha = s_1 + s_2 + \dots s_k$.

Лемма 2. *$B_{s_1 \dots s_k}$ есть многочлен от n и p степени $(\alpha / 2)$, если α четное, $(\alpha - 1) / 2$, если α нечетное, а именно, для четного α*

$$B_{s_1 \dots s_k} = \sum_{*} B_{m_1 m_2}(u, p) B_{m_3 m_4}(n, p) \dots B_{m_{\alpha-1} m_\alpha}(n, p) + \Delta(n, p).$$

Суммирование $(*)$ распространяется на все разбиения набора из s_1 единиц, s_2 двоек, s_3 троек, ... s_k чисел k на пары $m_1 m_2$; $m_3 m_4$; ...; $m_{\alpha-1} m_\alpha$. $\Delta(n, p)$ — многочлен меньшей степени, чем $\alpha / 2$.

Лемма 2 доказывается комбинаторными методами.

Лемма 3. *Смешанный момент нормально распределенного вектора $\xi = (\xi_1 \dots \xi_k)$ с нулевым средним и ковариационной матрицей Σ с элементами σ_{sr} выражается следующим образом: $M\xi_1^{s_1} \dots \xi_k^{s_k} = 0$, если $s_1 + \dots$*

$\ldots + s_k$ *нечетно;* $M\xi_1^{s_1} \ldots \xi_k^{s_k} = \sum_{*} \sigma_{m_1 m_2} \ldots \sigma_{m_{k-1} m_k}$, *где* $\sum_{*}$ *распространяется на всевозможные разбиения набора из* s_1 *единиц,* $\ldots$, s_k *чисел* k *на пары* $m_1 m_2$; $m_3 m_4$; $\ldots$; $m_{\alpha-1} m_\alpha$.

Доказательство леммы получается, например, из формулы для перехода от семиинвариантов к моментам ([3], стр. 211).

Из лемм 2 и 3 с помощью несложного предельного перехода получаем сходимость при $N \to \infty$ смешанных моментов вектора

$$\eta_1 = \frac{(A_1 - MA_1)}{(n+p)}, \quad \eta_k = \frac{(A_k - MA_k)}{(n+p)}$$

к соответствующим моментам многомерного нормального распределения.

Из сходимости всех смешанных моментов к моментам многомерного нормального распределения следует и сходимость самого распределения к нормальному. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Пусть* $\tilde{x}_j^i = c_j x_j^i$, *где*

$$c_j = \begin{cases} a_1 \text{ при } 1 \leqslant j < v_1, \\ a_k \text{ при } v_1 + \ldots + v_{k-1} \leqslant j < v_1 + \ldots + v_k, \\ a_t \text{ при } v_1 + \ldots + v_{t-1} \leqslant j < v_1 + \ldots + v_t = p, \end{cases}$$

а элементы $\tilde{\sigma}_{sr}$ *матрицы* $\tilde{S}_n$ *суть* $\tilde{\sigma}_{sr} = \sum_j \tilde{x}^s_{(j)} \tilde{x}^r_{(j)}$ *и* $\tilde{A}_k = \mathrm{Sp}[\tilde{S}_n]^k$.

Рассмотрим последовательность серий $v_1(N) \ldots v_t(N)$, $p(N)$, $n(N)$; *если при этом* $p(N) \to \infty$, $\frac{v_1(N)}{p(N)} = \gamma_1 + o\left(\frac{1}{p(N)}\right), \ldots, \frac{v_t(N)}{p(N)} = \gamma_t + o\left(\frac{1}{p(N)}\right)$, *то совместное распределение величин* $(\tilde{A}_1 - M\tilde{A}_1) / (n+p)^{1/2}$; $(\tilde{A}_k - M\tilde{A}_k) / (n+p)^{k/2}$ *сходится к нормальному с некоторым средним и ковариационной матрицей, зависящей от* $\gamma_1 \ldots \gamma_t$; y; $a_1, \ldots, a_t$.

Доказательство теоремы 3 аналогично доказательству теоремы 2. В частности, вектор $\tilde{A}_1$, $\tilde{A}_2$ имеет совместное асимптотически нормальное распределение со средним

$$\mu_1(y; \gamma_1 \ldots \gamma_k; a_1 \ldots a_k) = n^2 y \sum_k \gamma_k a_k,$$

$$\mu_2(y; \gamma_1 \ldots \gamma_k; a_1 \ldots a_k) = n^3 [y^2 (\sum \gamma_k a_k)^2 + y \sum \gamma_k a_k^2]$$

и ковариационной матрицей S:

$$s_{11}(y; \gamma_1 \ldots \gamma_k; a_1 \ldots a_k) = n^4 y \sum \gamma_k a_k^2.$$

$$s_{22}(y; \gamma_1 \ldots \gamma_k; a_1 \ldots a_k) = 8 [n^8 (y \sum \gamma_k a_k^4 - y^3 \sum \gamma_k a_k^2 (\sum \gamma_k a_k)^2 + \\ + 2 \sum \gamma_k a_k \cdot \sum \gamma_k a_k^3 + (\sum \gamma_k a_k^2)^2 y^2)],$$

$$s_{12}(y; \gamma_1 \ldots \gamma_k; a_1 \ldots a_k) = 4 \left[y^2 \left(\sum_k \gamma_k a_k^2 \right) (\sum a_k \gamma_k) + y \sum \gamma_k a_k^3 \right] n^6.$$

Полученный результат может быть использован для построения приближенного критерия для проверки гипотезы, что матрица ковариаций наблюдений x_i^j имеет вид $\Sigma = CE(\gamma_1, \varepsilon_1) C'$ при альтернативе $\Sigma = \tilde{C} E(\gamma_2, \varepsilon_2) \tilde{C}'$, где обозначено C, $\tilde{C}$ — ортогональная матрица, а

$$E(\gamma, \varepsilon) = \left\| \begin{array}{cccccccc} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & \ddots & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & & \varepsilon & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & \varepsilon \end{array} \right\| \left.\vphantom{\begin{array}{c} \varepsilon \\ \ddots \\ \varepsilon \end{array}}\right\} [p\gamma]$$

В этом случае проверка гипотезы сводится к тому, что вектор A_1A_2 имеет распределение со средним

$$\mu_1 = \mu_1(y;\ \gamma_1,\ 1-\gamma_1;\ 1,\ \varepsilon_1), \quad \mu_2 = \mu_2(y;\ \gamma_1,\ 1-\gamma_1;\ 1,\ \varepsilon_1)$$

и ковариационной матрицей

$$s_{11} = s_{11}(y;\ \gamma,\ 1-\gamma;\ 1,\ \varepsilon_1), \quad s_{22} = s_{22}(y;\ \gamma_1,\ 1-\gamma_1;\ 1,\ \varepsilon_1),$$
$$s_{12} = s_{12}(y;\ \gamma_1,\ 1-\gamma_1;\ 1,\ \varepsilon_1)$$

при альтернативе

$$\mu_1 = \mu_1(y;\ \gamma_2,\ 1-\gamma_2;\ 1,\ \varepsilon_2), \quad \mu_2 = \mu_2(y;\ \gamma_2,\ 1-\gamma_2;\ 1,\ \varepsilon_2);$$
$$s_{11} = s_{11}(y;\ \gamma_2,\ 1-\gamma_2;\ 1,\ \varepsilon_2), \quad s_{12} = s_{12}(y;\ \gamma_2,\ 1-\gamma_2;\ 1,\ \varepsilon_2);$$
$$s_{22} = s_{22}(y;\ \gamma_2,\ 1-\gamma_2;\ 1,\ \varepsilon_2).$$

Подобная задача решается стандартным методом на основании леммы Неймана — Пирсона.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
1 XII 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Arnold Ludvig, J. Math. Anal. and Appl., 20, № 2, 262 (1967). [2] М. Лоэв, Теория вероятностей, ИЛ, 1962. [3] Ю. В. Прохоров, Ю. А. Розанов, Справочная математическая библиотека. Теория вероятностей, «Наука», 1967.