Доклады Академии наук СССР
1971. Том 199, № 5

УДК 517.933 *МАТЕМАТИКА*

Л. А. БЕКЛЕМИШЕВА

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

(Представлено академиком Л. С. Понтрягиным 12 II 1971)

Изучается система обыкновенных дифференциальных уравнений в вещественной области:

$$dx_i/dt = x_i \sum_1^m a_{ik} x_1^{q_{k1}} \ldots x_n^{q_{kn}}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Ниже будет удобно обозначить столбцы из величин x_i, a_{ik}, α_i, t^{α_i}, $e^{\alpha_i t}$ $(i = 1, \ldots, n)$ через x, A_k, α, t^α, $e^{\alpha t}$ соответственно; пусть также $(q_{k1}, \ldots, q_{kn}) = Q_k$, $x^{q}{}_1 \ldots x_n^{q_{kn}} = x^{Q_k}$. Система (1) может быть записана в сокращенном виде

$$dx/dt = x \circ \sum^m A_k x^{Q_k}, \tag{1}$$

$\circ$ означает покомпонентное умножение столбцов.

В работах [1,2] было показано, что при отыскании решений вида $x = c \circ t^\alpha \circ (1 + o(1))$ (c — столбец из n отличных от 0 постоянных, $[1 + o(1)]$ — столбец из n функций, стремящихся к 1 при $t \to +\infty$) из правой части системы (1) можно выбросить некоторые члены, являющиеся несущественными. Для того чтобы найти эти члены, А. Д. Брюно предложил некоторый алгоритм. Оказалось, что метод А. Д. Брюно можно использовать при исследовании более широкого класса решений системы уравнений (1).

Назовем вектор α *экспоненциальным показателем* (э.п.) вектор-функции $x(t)$, если α_i есть характеристический показатель Ляпунова функции $x_i(t)$ при $i = 1, \ldots, n$, $t \to +\infty$. Назовем вектор α *степенным показателем* (с.п.) вектор-функции $x(t)$, если α_i есть характеристический показатель функции $x_i(t)$ по отношению к t при $i = 1, \ldots, n$, $t \to +\infty$ (см. [3]). Вектор α будем называть *точным* э.п. $x(t)$, если $\alpha_i = \lim\limits_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \ln |x_i(t)|$, $i = 1, \ldots, n$; *точным* с. п., если $\alpha_i = \lim\limits_{t \to +\infty} \frac{\ln |x_i(t)|}{\ln t}$, $i = 1, \ldots, n$.

Рассмотрим пространство $\mathscr{E}_n$ векторов α и пространство $\mathscr{E}_{n+1}$ векторов с координатами $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, z. В $\mathscr{E}_{n+1}$ рассмотрим n-мерную поверхность

$$z = \max_{i=1,\ldots,m} (Q_i, \alpha) = \max_{i=1,\ldots,m} (q_{i1}\alpha_1 + \ldots + q_{in}\alpha_n) \equiv \Phi(\alpha).$$

Множество $\mathscr{E}_n \setminus 0$ можно представить как сумму конечного числа непересекающихся открытых конусов Γ_s различных размерностей s, примыкающих к началу координат 0, таких, что на Γ_s функция $z = \Phi(\alpha)$ определяет открытую часть некоторой s-мерной плоскости. Уравнения, определяющие Γ_s:

$$(Q_i, \alpha) = (Q_k, \alpha) = \lambda(\alpha) \quad \text{при } i, k \in I(\Gamma_s),$$
$$(Q_i, \alpha) > (Q_k, \lambda) \qquad \text{при } i \in I(\Gamma_s),\ k \overline{\in} I(\Gamma_s),$$

где $I(\Gamma_s)$ — произвольное подмножество индексов из $\{1, \ldots, m\}$. Для некоторых I Γ_s пусто; если I содержит единственный индекс, то соответствующий конус Γ_s n-мерный.

Пусть $\alpha \in \Gamma_s$. Сделаем в системе уравнений (1) замены неизвестной $x = e^{\alpha t} \circ y$ и $x = t^{\alpha} \circ y$. В обоих случаях можно подобрать замену времени $\tau = \tau(t, \alpha)$ таким образом, чтобы система (1) переходила в

$$dy/d\tau = y \circ \left[f(\tau) + \sum_{k \in I(\Gamma_s)} A_k y^{Q_k} + \varphi(\tau, y) \right], \tag{2}$$

или в

$$dy / d\tau = y \circ [-\alpha + \varphi(\tau, y)]. \tag{3}$$

В уравнении (2)

$$f(\tau) = \begin{cases} -\alpha & \text{при } \lambda(\alpha) = 0,\ x = e^{\alpha t} \circ y,\ t = \tau & \text{(случай 1)} \\ -\alpha & \text{при } \lambda(\alpha) = -1,\ x = t^{\alpha} \circ y,\ t = e^{\tau} & \text{(случай 2)}, \\ -\alpha/(\lambda\tau) & \text{при } \lambda = \lambda(\alpha) > 0,\ x = e^{\alpha t} \circ y,\ t = \ln \tau & \text{(случай 3)}, \\ -\dfrac{\alpha}{(\lambda+1)\tau} & \text{при } \lambda = \lambda(\alpha) > -1,\ x = t^{\alpha} \circ y,\ t^{\lambda+1} = (\lambda+1)^{\tau} & \text{(случай 4)}; \end{cases}$$

$\varphi(\tau, y)$ — столбец из многочленов по тем степеням y^Q, которые не вошли в $\sum\limits_{k \in I(\Gamma_s)}$, с коэффициентами, стремящимися к 0 при $\tau \to \infty$. Уравнение (3) получается, если $\lambda(\alpha) < 0$, $x = e^{\alpha t} \circ y$, $t = \tau$ (случай 5), и если $\lambda(\alpha) < -1$, $x = t^{\alpha} \circ y$, $t = e^{\tau}$ (случай 6). При этом $\varphi(\tau, y)$ — столбец из многочленов по степеням y^{Q_k} с коэффициентами вида $ae^{-\gamma\tau}$ $(\gamma > 0)$. Системы (2), (3) назовем **приведенными при данном** α.

Лемма 1. *Если какое-либо решение системы* (1) *имеет конечный показатель* α *(степенной или экспоненциальный), то соответствующее решение приведенной при данном* α *системы уравнений имеет показатель соответствующего типа, равный* 0, *и обратно. В случаях* 1, 2, 5, 6 *этот новый показатель экспоненциальный, в случаях* 3, 4 — *степенной.*

Решения приведенной системы, имеющие показатель (соответствующего типа), равный 0, назовем **приведенными** решениями.

Лемма 2. *Вдоль всякого приведенного решения* $\varphi(\tau, y) \to 0$.

Условие А. *Все показатели степени в правых частях системы уравнений* (1) *неотрицательные.*

Условие В. *Мы ограничиваемся исследованием таких решений* $x(t)$, *которые имеют конечный точный показатель. В этом случае можно считать, что* $x_i(t) > 0$, $i = 1, \ldots, n$.

Теорема 1. *Пусть выполнено одно из условий* А *или* В.

Тогда конечные э.п. решений системы (1) *лежат вне области* $\{\alpha;\ (Q_k, \alpha) < 0,\ k = 1, \ldots, m\}$, *а конечные с.п.— вне области* $\{\alpha;\ (Q_k, \alpha) < -1,\ k = 1, \ldots, m\}$.

Входящую в правую часть уравнения (2) сумму $\sum\limits_{k \in I(\Gamma_s)}$ назовем **главной частью** (2). При $\alpha \in \Gamma_n$ главная часть есть одночлен. Это обстоятельство облегчает изучение приведенных решений. Имеет место

Теорема 2. *Пусть* Γ_n — *фиксированный конус размерности* n. *В области* $\{\alpha;\ \alpha \in \Gamma_n,\ \lambda(\alpha) > 0\}$ *нет точных э.п. решений системы* (1). *В области* $\{\alpha;\ \alpha \in \Gamma_n,\ \lambda(\alpha) > -1\}$ *нет точных с.п.*

При исследовании решений, имеющих точный показатель, приведенную систему можно преобразовать к более простому виду с помощью бирациональных преобразований неизвестных функций.

Пусть размерность линейной оболочки векторов Q_k, $k \in I(\Gamma_s)$, равна q. Систему (2) можно преобразовать к виду

$$\frac{du}{d\tau} = u \circ \left[h(\tau) + \sum_{k \in I(\Gamma_s)} C_k u^{M_k} + \widetilde{\psi}(\tau, u, v) \right],$$

$$\frac{dv}{d\tau} = v \circ \left[g(\tau) + \sum_{k \in I(\Gamma_s)} B_k u^{M_k} + \widetilde{\psi}(\tau, u, v) \right]. \qquad (4)$$

Здесь u, $h(\tau)$, C_k, $\widetilde{\psi}$ — q-мерные столбцы, M_k — q-мерные строки, а v, $g(\tau)$, B_k, $\widetilde{\varphi}$ — $(n-q)$-мерны. Новые переменные являются произведениями степеней старых переменных. Система (4) называется присоединенной при данном α.

Лемма 3. *Каждому решению* (1), *имеющему конечный точный показатель* α (*степенной или экспоненциальный*), *соответствует единственное решение присоединенной при данном* α *системы, имеющее точный показатель соответствующего типа, равный* 0, *и обратно.*

Решения присоединенной системы, имеющие точный показатель соответствующего типа, равный 0, называем присоединенными решениями.

Лемма 4. *Вдоль присоединенных решений* $\widetilde{\varphi}$, $\widetilde{\psi}$ *стремятся к* 0 *при* $\tau \to +\infty$.

Таким образом, изучение решений системы (1), имеющих конечные с.п. или э.п., сведено к исследованию решений, имеющих показатель 0, для систем вида (2) — (4). В силу лемм 2 и 4, эти последние естественно изучать, сначала отбросив из правых частей стремящиеся к нулю добавки $\widetilde{\varphi}$, $\widetilde{\psi}$, и затем ставить вопрос об устойчивости полученных таким образом решений.

Для одного уравнения этот вопрос достаточно прост. Пользуясь этим в случаях, когда исследуемый показатель точный и принадлежит Γ_n или Γ_{n-1} при $q = 1$, можно получить довольно полный результат.

Пусть $\alpha \in \Gamma_n$. $I(\Gamma_n)$ содержит единственный номер. Пусть, для определенности, $I(\Gamma_n) = 1$. Тогда главная часть приведенной системы состоит из одночлена $A_1 y^{Q_1}$.

Теорема 3. *Пусть* $\alpha \in \Gamma_n$. *Для того чтобы система* (1) *имела решения с точным экспоненциальным показателем* α, *необходимо, чтобы* $(Q_1, \alpha) = 0$, *и* $A_1 \| \alpha$; *следовательно, необходимо, чтобы* $(Q_1, A_1) = 0$, *и* $\pm A_1 \in \Gamma_n$, *т. е. либо* A_1, *либо* $-A_1$ *принадлежало* Γ_n.

Теорема 4. *Пусть* $(Q_1, A_1) = 0$ *и* $\pm A_1 \in \Gamma_n$.

Тогда каждое решение системы (1) *с точным э.п.* α, *принадлежащим* Γ_n, *имеет вид* $x(t) = c \circ e^{\alpha t} \circ (1 + o(1))$, *причем* $\alpha = CA_1$ *и* $c^{Q_1} = C$.

Теорема 5. *Пусть* $\alpha \in \Gamma_n$. *Для того чтобы система* (1) *имела решения с точным степенным показателем* α, *необходимо, чтобы* $(Q_1, \alpha) = -1$ *и* $A_1 | \alpha$; *следовательно, необходимо, чтобы* $(Q_1, A_1) \neq 0$ *и* $\pm A_1 \in \Gamma_n$.

Теорема 6. *Пусть* $(Q_1, A_1) \neq 0$ *и* $\mp A_1 \in \Gamma_n$.

Тогда каждое решение системы (1) *с точным с.п.* α, *принадлежащим* Γ_n, *имеет вид* $x(t) = c \circ t^{\alpha} \circ (1 + o(1))$, *причем* $\alpha = -A_1 / (Q_1, A_1)$ *и* $c^{Q_1} = -1 / (Q_1, A_1)$.

Пусть $\alpha \in \Gamma_{n-1}$ и $q = 1$. Тогда в присоединенной системе уравнений M_k — вещественные числа. $\sum_1^r C_k u^{M_k} = P(u)$ есть обычный многочлен, а $\sum_1^r B_k u^{M_k}$ — столбец из $n - 1$ многочленов, которые мы обозначим $P_i(u)$, $i = 1, \ldots, n - 1$.

Теорема 7. *Для того чтобы система* (1) *имела хоть одно решение с точным э.п.* $\alpha \in \Gamma_{n-1}$ $(q=1)$, *необходимо, чтобы уравнение* $P(u)=0$ *имело отличный от 0 корень* u_0, *причем*

$$\sum_{1}^{n-1} P_i^2(u_0) \neq 0, \quad \alpha = \sum_{1}^{r} A_k u_0^{M_k} \ (\neq 0).$$

Теорема 8. *Для того чтобы система* (1) *имела хоть одно решение с точным с.п.* $\alpha \in \Gamma_{n-1}$ $(q=1)$ *необходимо, чтобы все уравнения* $P(u) = 0$, $P_i(u)=0$, $\sum_{1}^{r} A_k u^{M_k} = 0$ *имели общий отличный от 0 корень.*

Исследовав более подробно систему (4), можно получить асимптотические формулы для соответствующих решений системы (1). В этом случае, как и в случае $\alpha \in \Gamma_n$, характерно, что решения экспоненциальные и степенные появляются в дополняющих одна другую ситуациях.

С помощью систем (2) — (4) можно исследовать вопрос о наличии у данной системы (1) решений вида

$$x(t) = c \circ t^{\alpha} \circ (1 + o(1)); \tag{5}$$

$$x(t) = c \circ e^{\alpha t} \circ (1 + o(1)) \tag{6}$$

(c, α, $1 + o(1)$ — векторы; все компоненты c отличны от 0).

Теорема 9. *Пусть система уравнений* (1) *имеет решение вида* (5). *Тогда либо* $\lambda(\alpha) = -1$ *и* $\sum_{k \in I(\Gamma_s)} A_k c^{Q_k} = \alpha$, *либо* $\lambda(\alpha) > -1$ *и* $\sum_{k \in I(\Gamma_s)} A_k c^{Q_k} = 0$.

Теорема 10. *Пусть система* (1) *имеет решение вида* (6). *Тогда либо* $\lambda(\alpha) = 0$ *и* $\sum_{k \in I(\Gamma_s)} A_k c^{Q_k} = \alpha$, *либо* $\lambda(\alpha) > 0$ *и* $\sum_{k \in I(\Gamma_s)} A_k c^{Q_k} = 0$.

Алгебраические уравнения, о которых идет речь в теоремах 9 и 10, представляют аналог уравнений, возникающих при отыскании решений линейных систем, и совпадают с ними, если правая часть (1) линейная. Используя присоединенную систему, эти уравнения можно упростить.

Задача отыскания решений вида (5) рассмотрена с иной точки зрения в ([1], [2]).

Московский физико-технический институт

Поступило 8 II 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Д. Брюно, ДАН, 143, № 4, 763 (1962). [2] А. Д. Брюно, Изв. АН СССР, сер. матем., 29, № 2, 329 (1965). [3] В. В. Немыцкий, В. В. Степанов, Качественная теория дифференциальных уравнений, М.— Л., 1949.