Доклады Академии наук СССР
1971. Том 198, № 3

УДК 519.281 *МАТЕМАТИКА*

Академик Ю. В. ЛИННИК, А. Л. РУХИН

ВЫПУКЛЫЕ ФУНКЦИИ ПОТЕРЬ В ТЕОРИИ НЕСМЕЩЕННОГО ОЦЕНИВАНИЯ

Пусть $(X, \mathfrak{A})$ — выборочное пространство с семейством мер P_θ, зависящих от абстрактного параметра $\theta \in \Theta$. При мере качества, задаваемой некоторой положительной выпуклой функцией потерь W, оценке на основе выборочной точки $x \in X$ подлежит вещественная функция $g(\theta)$. Мы будем рассматривать здесь лишь несмещенные оценки $f(x)$, т. е. такие, для которых при всех $\theta \in \Theta$

$$E_\theta f(x) = g(\theta). \tag{1}$$

Нашей задачей является исследование несмещенных оценок с минимальным риском (н.о.м.р.), т. е. оценок f, удовлетворяющих (1) и минимизирующих величину риска

$$R_\theta(f) = E_\theta W(f(x) - g(\theta)). \tag{2}$$

Будем рассматривать дважды дифференцируемые, за возможным исключением точки 0, выпуклые функции потерь $W(u)$, $W(0) = 0$, удовлетворяющие неравенству (Δ_2-условию, см. ([1]), стр. 37).

$$W(2u) \leqslant CW(u). \tag{3}$$

Известно, что в этом случае $W(u) \leqslant C|u|^p$ и $|u|W'(u) \leqslant KW(u)$, где $K \geqslant 1$.

Будет показано, что если $f(x)$ — н.о.м.р., отвечающая функции потерь $W(u) = u^2$, то $f(x)$ при определенных условиях является и н.о.м.р. для указанных функций потерь W. Этот результат является обобщением основной теоремы из ([5]), где показано, что при аналогичных предположениях f является н.о.м.р. для функций потерь вида $W(u) = |u|^p$, $p \geqslant 2$ или $p = 1$.

Предложение. *Пусть W — дважды непрерывно дифференцируемая выпуклая функция потерь, удовлетворяющая* (3). *Необходимым и достаточным условием того, что $f(x)$ есть н.о.м.р., является*

$$E_\theta W'(f(x) - g(\theta))\chi(x) = 0 \tag{4}$$

для любой статистики $\chi(x)$ с условием

$$E_\theta\chi(x) = 0; \tag{5}$$

$$E_\theta W(\chi(x)) < \infty. \tag{6}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $f(x)$ — н.о.м.р., а χ — некоторая статистика, удовлетворяющая (6) и (5). Тогда $f(x) + \lambda\chi(x)$ — несмещенная оценка $g(\theta)$ с конечным в силу (3) риском для всех достаточно малых λ. Имеем

$$\min_\lambda E_\theta W(f(x) + \lambda\chi(x) - g(\theta)) = E_\theta W(f(x) - g(\theta))$$

и

$$\frac{d}{d\lambda} E_\theta W(f(x) + \lambda\chi(x) - g(\theta))|_{\lambda=0} = E_\theta W'(f(x) - g(\theta)) = 0.$$

Достаточность. Предположим, что выполнено условие (4). Покажем, что при всех $\theta \in \Theta$

$$E_\theta W(f(x) - g(\theta)) \leqslant E_\theta W(h(x) - g(\theta)),$$

где h удовлетворяет (1). Мы можем считать, что $E_\theta W(h(x) - g(\theta)) < \infty$. Тогда

$$\begin{gathered} E_\theta W(h(x) - g(\theta)) = E_\theta W(f(x) - g(\theta) + h(x) - f(x)) = \\ = E_\theta[W(f(x) - g(\theta)) + (h(x) - f(x))W'(f(x) - g(\theta)) + \\ + {}^1/_2(h(x) - f(x))^2 W''(f(x) - g(\theta)) + \xi(h(x) - f(x))], \end{gathered} \tag{7}$$

где $0 \leqslant \xi \leqslant 1$. Поскольку $h(x) - f(x)$ удовлетворяет (6) и (5), то в силу условия (4) второе слагаемое в (7) равно нулю, и, значит, последний интеграл конечен. Но $W'' \geqslant 0$ и, значит, при всех $\theta \in \Theta$

$$E_\theta W(h(x) - g(\theta)) \geqslant E_\theta W(f(x) - g(\theta)).$$

Отметим, что этот результат верен и для негладких выпуклых функций вида

$$W(u) = \begin{cases} W_1(u), & u > 0; \\ W_2(u), & u < 0, \end{cases} \tag{8}$$

где $W_1(0) = W_2(0) = 0$ и функции $W_1(u)$, $W_2(u)$ выпуклы и удовлетворяют (3).

Доказанное предложение обобщает известные критерии оптимальности, относящиеся к случаю $W(u) = |u|^p$, $p \geqslant 2$ (см. [2, 6]).

Сформулируем теперь основной результат.

Теорема 1. *Предположим, что множество оценок χ с условиями $E_\theta\chi^4(x) < \infty$ и (5) плотно в метрике $L_2(P_\theta)$ при всех $\theta \in \Theta$ в множестве всех статистик из $L_2(P_\theta)$, удовлетворяющих (5). Пусть $f(x)$ — н.о.м.р., отвечающая функции потерь $W(u) = u^2$, причем*

$$E_\theta|f(x)|^k < \infty, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad \sum_{k=1}^{\infty} (E_\theta f(x)^{2k})^{-1/(2k} = \infty. \tag{9}$$

Тогда, если $W(u)$ — вещественно аналитическая функция с условием (3), то $f(x)$ является н.о.м.р. для функции потерь W.

Если $W(u)$ — полином степени k, то условие (9) можно заменить на $E_\theta f(x)^{2(k-1)} < \infty$.

Доказательство. Согласно условиям теоремы и доказанному предложению

$$E_\theta(f(x) - g(\theta))\chi(x) = 0 \tag{10}$$

для всех статистик χ, для которых выполнено (5) и $E_\theta\chi^2(x) < \infty$. Но тогда и $E_\theta f(x)\chi(x) = 0$, т. е. $f(x)\chi(x)$ вместе с $\chi(x)$ является несмещенной оценкой нуля. При этом в силу условий теоремы можно считать, что $E_\theta\chi^4(x) < \infty$, откуда выводим

$$E_\theta f^2(x)\chi^2(x) \leqslant \sqrt{Ef^4(x)E\chi^4(x)} < \infty$$

и в силу (10)

$$E_\theta f^2(x)\chi(x) = 0$$

при всех χ с условиями (5) и $E_\theta\chi^2(x) < \infty$. По индукции получаем

$$E_\theta f^k(x)\chi(x) = 0$$

для $k = 1, 2, \ldots$, откуда

$$E_\theta W'(f(x) - g(\theta))\chi(x) = 0.$$

Если $W(u)$ — полином степени k, то для доказательства соотношения

$$E_\theta W'(f(x) - g(\theta))\chi(x) = 0$$

достаточно показать $Ef^s(x)\chi(x)=0$, $s=1,\ldots,k-1$. Из предыдущего видно, что эти равенства верны, если $Ef(x)^{2(k-1)}<\infty$. Для завершения доказательства в силу предложения осталось заметить, что из условия $EW(\chi(x))<\infty$ следует $E\chi^2(x)<\infty$.

Рассматривая «урезанные» оценки f_N,

$$f_N(x)=\begin{cases} f(x), & |f(x)|<N; \\ 0 & |f(x)|>N; \end{cases}$$

можно показать, что если $f(x)$ — н.о.м.р. для функции потерь $W(u)=u^2$ и $E_\theta W(f(x)-g(\theta))=\infty$, то и $E_\theta W(h(x)-g(\theta))=\infty$ для любой несмещенной оценки $h(x)$ с конечной дисперсией.

Справедлив также следующий результат.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{B}$ — σ-алгебра, порожденная ограниченными н.о.м.р. для функции потерь $W(u)=u^2$. Если функция потерь W имеет вид* (8), *где $W_1(u)$, $W_2(u)$ — вещественно аналитические функции, оценка $f(x)$ измерима относительно σ-алгебры $\mathfrak{B}$ и является н.о.м.р. для функции потерь $W(u)=u^2$, то f — н.о.м.р. и для функции потерь W.*

Отметим, что в теореме 2 требование $\mathfrak{B}$-измеримости оценки $f(x)$ является существенным.

Таким образом, несмещенные оценки, оптимальные в смысле минимальной дисперсии, являются и н.о.м.р. для весьма широкого класса выпуклых функций потерь в следующих примерах, указанных в [5]. (Интересен лишь случай распределений с неполными достаточными статистиками.)

1. Неполные экспонентные семейства с полиномиальными связями (см. [4], стр. 232). В этом случае плотность меры P_θ $\theta=(\theta_1,\ldots,\theta_s)\in R^s$ распределения вектора достаточных статистик $T=(T_1,\ldots,T_s)$ имеет вид

$$P_\theta(T)=C(\theta)h(T)\exp\{\theta_1T_1+\ldots+\theta_sT_s\},$$

где $h(T)\geqslant 0$. При этом параметры $\theta_1,\ldots,\theta_s$ удовлетворяют уравнениям связи

$$\Pi_q(\theta_1,\ldots,\theta_s)=0,$$

где $\Pi_q(\theta_1,\ldots,\theta_s)$ — полиномы от $\theta_1,\ldots,\theta_s$, $q=1,\ldots,r$, $r<s$. В этом случае известны необходимые и достаточные условия того, что несмещенная оценка $f(x)$ имеет минимальную дисперсию. Эта оценка будет иметь и минимальный риск для указанных функций потерь.

2. Ограниченные выборочные биномиальные планы объема n с $n+m+1$ $(m>0)$ граничными точками (см. [3]). В этом случае достаточные статистики неполны, но существуют нетривиальные несмещенные оценки с минимальной дисперсией и, значит, с минимальным риском для рассмотренных выпуклых функций.

Указанные результаты могут быть перенесены на случай монотонных выпуклых функций потерь, что будет изложено отдельно.

Ленинградское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
22 II 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. А. Красносельский, Я. Б. Рутицкий, Выпуклые функции и пространства Орлича, М., 1958. [2] С. Р. Рао, Линейные статистические методы и их применения, «Наука», 1968. [3] М. Н. DeGroot, Ann. Math. Statist., 30, 80 (1959). [4] Yu. V. Linnik, Statistical Problems with Nuisance Parameters, Suppl., Am. Math. Soc., 1968. [5] A. R. Padmanabhan, Sankhya, Ser. A, 32, 1, 107 (1970). [6] L. Schmetterer, Extrait du Bull. de la Soc. Belg. de Statist., 1957, p. 52.