Доклады Академии наук СССР
1971. Том 198, № 3

УДК 517.11 *МАТЕМАТИКА*

С. С. МАРЧЕНКОВ

О МИНИМАЛЬНЫХ НУМЕРАЦИЯХ СИСТЕМ РЕКУРСИВНО ПЕРЕЧИСЛИМЫХ МНОЖЕСТВ

(Представлено академиком П. С. Новиковым 24 XI 1970)

Среди вычислимых нумераций систем рекурсивно перечислимых (р.п.) множеств особое место занимают минимальные нумерации. Нумерация α системы S р.п. множеств называется минимальной, если всякая нумерация β системы S, сводящаяся к α, эквивалентна последней. Для наиболее важного и интересного случая — системы $\mathfrak{F}$ всех р.п. множеств — наличие минимальной (даже однозначной) нумерации было установлено сравнительно давно ([1]). В работах ([2], [3]) существование однозначных нумераций доказывается для довольно обширного класса систем. Вместе с тем, в настоящее время, по-видимому, не найден пример системы, не обладающей минимальной (или позитивной) нумерацией. В настоящей заметке приводятся два достаточных условия существования позитивных и однозначных нумераций (теоремы 1, 2). Теорема 3 позволяет при довольно общих предположениях относительно системы S, имеющей однозначную нумерацию, сделать вывод о существовании бесконечной последовательности попарно не сравнимых однозначных нумераций системы S. В теоремах 4, 5 изучаются совокупности номеров отдельных множеств в минимальных нумерациях. Все неопределяемые понятия можно найти в ([2], [4]). В дальнейшем под системой мы понимаем вычислимую систему р.п. множеств, а под нумерацией — вычислимую нумерацию системы р.п. множеств.

Назовем множество P предельным для системы S, если любое конечное подмножество P содержится в подходящем множестве из S. Будем говорить, что система S предельна для системы T, если любое множество из S предельно для системы T.

Теорема 1. *Пусть система S содержит подсистему T конечных множеств такую, что система S предельна для системы T.*

Тогда S имеет позитивную нумерацию.

Следствие. *Всякая (вычислимая) система конечных множеств имеет позитивную нумерацию.*

Пусть P — множество системы S. Будем говорить, что P максимально в S, если P не является собственным подмножеством никакого множества из S.

Теорема 2. *Пусть система S содержит подсистему T, обладающую свойствами:*

1) *если два множества из T пересекаются, то одно из них содержится в другом;*

2) *в T не имеется максимальных множеств;*

3) *система S предельна для системы T.*

Тогда система S обладает однозначной нумерацией.

Следствие 1 (Фридберг, ([1])). *Система $\mathfrak{F}$ всех р.п. множеств имеет однозначную нумерацию.*

Доказательство. В качестве системы T, фигурирующей в условии теоремы, возьмем систему, состоящую из множеств $e_i = \{0, 1, \ldots, i\}$.

Следствие 2. *Любая линейно упорядоченная (по включению) система, не содержащая максимального множества, обладает однозначной нумерацией.*

При доказательстве теоремы 2 решающую роль играет

Лемма. *Пусть система T удовлетворяет условиям* 1), 2) *теоремы. Тогда T содержит подсистему U, обладающую свойствами:*

1) *любое множество из T содержится в подходящем множестве из U;*
2) *система U имеет однозначную нумерацию α, в которой*

$$\forall x, \forall y \quad x < y \& \alpha x \cap \alpha y \neq \phi \Rightarrow \alpha x \subset \alpha y.$$

В работах ([5], [6]) наметились пути для установления бесконечности множества попарно не сравнимых нумераций из некоторых классов. В теореме 3 предлагается другой подход к этому вопросу.

Назовем систему S непрерывной, если любое конечное подмножество любого множества P из S содержится в подходящем множестве Q из S, отличном от P.

Пусть α — нумерация системы S, $T \subseteq S$. Нумерацию α назовем однозначной относительно T, если любое множество из T имеет в нумерации α единственный номер.

Положим $E_0 = \{0, 1, 3, 5, \ldots\}$ и для $i > 0$ $E_i = \{2^i(2k+1) \mid k = 0, 1, \ldots\}$. Если $\Phi_i(x)$ — прямой пересчет множества E_i, то пусть $e_{i,k} = \Phi_i(k)$. Если $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ — последовательность нумераций, то через $\sum\limits_{i \geqslant 0} \alpha_i$ обозначим нумерацию α, удовлетворяющую условию: для всех $i, k \geqslant 0$ $\alpha e_{i,k} = \alpha_i k$.

Последовательность нумераций $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ назовем вычислимой, если существует такая частично рекурсивная функция $A(i, n, x)$, что для любого $i \geqslant 0$ функция $\lambda n, x\ A(i, n, x)$ является универсальной функцией нумерации α_i.

Теорема 3. *Пусть система S имеет нумерацию α_0 и удовлетворяет условиям:*

1) *S содержит α_0 — вполне перечислимую непрерывную подсистему T, имеющую непустые множества;*
2) *нумерация α_0 однозначна относительно системы T.*

Тогда существует бесконечная вычислимая последовательность $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ однозначных относительно T нумераций системы S такая, что для любого $i \geqslant 0$ нумерации α_i и $\sum\limits_{j \neq i} \alpha_j$ несравнимы.

Следствие 1 (Хуторецкий, ([6])). *Система $\mathfrak{F}$ всех р.п. множеств имеет бесконечную вычислимую последовательность попарно не сравнимых однозначных нумераций.*

Следствие 2. *Существует бесконечная вычислимая последовательность попарно не сравнимых позитивных нумераций системы $\mathfrak{F}$, каждая из которых не эквивалентна никакой однозначной.*

Еще одно применение теоремы 3 будет дано после теоремы 5.

Назовем систему S нормальной, если вместе с каждым конечным множеством системе S принадлежат и все его непустые подмножества.

Следующая теорема дополняет результат Хуторецкого из ([6]).

Теорема 4. *Любая минимальная нумерация бесконечной нормальной системы эквивалентна нумерации, в которой любое конечное множество имеет конечное число номеров.*

Нетрудно указать пример (вычислимой) системы конечных множеств, не имеющей никакой (вычислимой) нумерации, в которой любое множество имело бы конечное число номеров. Именно, определим такую систему S_0 следующим образом. Пусть C — множество чисел класса $\exists\forall$ арифметической иерархии Клини — Мостовского, не принадлежащее классу $\forall\exists$. Положим $S_1 = \{\{n\} \mid n \in C\}$, $S_2 = \{\{n, 0\} \mid n > 0\}$, $S_0 = S_1 \cup S_2$.

Если α — нумерация системы S и $A \in S$, то через $\alpha^{-1}A$ обозначим совокупность всех α — номеров множества A.

Следующая теорема является положительным ответом на вопрос Хуторецкого ([7], стр. 487).

Теорема 5. *Пусть система S удовлетворяет условиям:*

1) *существует нумерация ν подсистемы $S_1 \subset S$, в которой*

$$\forall x \quad \nu x \subset \nu(x+1);$$

2) *множество* $A = \bigcup\limits_{x \geqslant 0}$ *принадлежит системе S;*

3) *система $S \setminus S_1$ имеет минимальную нумерацию.*

Тогда существует минимальная нумерация α системы S, в которой множество $\alpha^{-1}A$ не рекурсивно перечислимо.

Используя конструкцию теоремы 3, получаем два следствия.

Следствие 1. *В условиях теоремы 5 существует бесконечная вычислимая последовательность $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ попарно не сравнимых минимальных нумераций системы S, в каждой из которых множество $\alpha_i^{-1}A$ не рекурсивно перечислимо.*

Следствие 2. *Следствие 1 справедливо для системы $\mathfrak{F}$ всех р.п. множеств.*

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
24 XI 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] R. M. Friedberg, J. Symb. Logic, 23 (1958). [2] M. B. Pour-El, W. A. Howard, Zs. math. Logik u. Grundlag. Math., 10, № 2 (1964). [3] A. H. Lachlan, Zs. math. Logik u. Grundlag Math., 11, № 3 (1965). [4] А. И. Мальцев, Алгоритмы и рекурсивные функции, М., 1965. [5] А. И. Мальцев, ДАН, 160, № 2 (1965). [6] А. Б. Хуторецкий, Алгебра и логика, 8, № 2 (1969). [7] А. Б. Хуторецкий, Алгебра и логика, 8, № 4 (1969).