Доклады Академии наук СССР
1971. Том 198, № 3

УДК 517.946 *МАТЕМАТИКА*

М. И. МАТИЙЧУК, С. Д. ЭЙДЕЛЬМАН

# О ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ И ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ПРОСТРАНСТВАХ ДИНИ

*(Представлено академиком И. Г. Петровским 3 XII 1970)*

В наших работах (1) была подробно изучена задача Коши для параболических по Петровскому систем в пространствах Дини в предположении, что модуль непрерывности $\omega(h)$ коэффициентов как функций пространственных координат удовлетворяют условию $\int\limits_0^x \omega(h)h^{-1}dh < \infty$ (условие Дини). При этом наряду с фактом корректности задачи Коши были установлены теоремы о гомеоморфизме, осуществляемом оператором задачи Коши и обратным к нему оператором в пространствах Дини. Попутно методом Хопфа были построены фундаментальные решения параболических систем и установлена точная теорема о действии оператора типа объемного параболического потенциала. Изучение фундаментальных решений эллиптических уравнений и их свойств в сходных предположениях проведено нами в работе (2) (см. также (3)).

Здесь излагаются применения аналогичных с развитыми в (1, 2) методов к изучению классической разрешимости простейших задач математической физики. Вводимые при этом пространства, нормы и ограничения взяты из наших предыдущих работ (1, 2). В заключение приводятся более общие результаты.

1. Постановка задач. Определения. Условия. Рассмотрим в области $Q = (0, T) \times V$ (возможно, неограниченной) равномерно параболическое уравнение

$$Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{j=1}^{n} b_j(t,x)\frac{\partial u}{\partial x_j} - Cu = f, \tag{1}$$

начальное

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in V, \tag{2}$$

и одно из граничных

$$u|_\Gamma = \Psi_1(t,x), \quad \Gamma = (0,T) \times \partial V \equiv (0,T) \times S, \tag{3'}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \nu} + a(t,x)u\right)_\Gamma = \Psi_2(t,x) \tag{3''}$$

условий; $\nu$ — направление конормали к $S$.

Определим рассматриваемые классы поверхностей.

Определение 1. Поверхность $S$ в $\mathbf{R}^n$ принадлежит классу $C^{(k,\omega)}$, если она может быть разбита на конечное число кусков, каждый из которых в локальной системе координат представим уравнением $\xi_n = \Phi(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$ с функцией $\Phi \in C^{(k,\omega)}(T_\delta)$, $T_\delta = \{\xi' = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}), |\xi'| < \delta\}$.

Напомним (1, 2), что $C_x^{(k,\omega)}(Q) \equiv C^{(k,\omega)}(Q)$ — банахово пространство $k$ раз дифференцируемых функций, для которых конечна норма

$$\|f\|_{k,\omega} = \|f\|_{C^{(k)}(Q)} + \sum_{|m|=k} \sup_{\substack{x \neq \xi \\ Q}} \{|D_x^m f(t,x) - D_x^m f(t,\xi)| / \omega(|x-\xi|)\}.$$

Аналогично определим пространство $C_{x,t}^{(k,\omega)}(Q)$ как совокупность функций $f(t, x)$, для которых конечна норма

$$\|f\|_{k,\omega} = \|f\|_{C^{(k)}} + \sum_{|m|=k} \sup_{x \neq \xi,\, t \neq \tau \atop Q} \left\{ \frac{|D_x^m f(t,x) - D_\xi^m f(\tau,\xi)|}{\omega(\sqrt{|x-\xi|^2 + |t-\tau|})} \right\}.$$

Определение 2. Дифференцируемая $k$ раз функция $f(t, x)$ принадлежит классу $C_{\omega_1, \omega_2}^{(k, \omega_3)}(Q)$, если конечна норма

$$\|f\|_{\omega_1, \omega_2}^{(k, \omega_3)} = \sup_Q \{ |f(t,x)| / \omega_3(\rho(x,s)) \} + \sum_{1 \leqslant |m| \leqslant k} \sup_Q \{ |D^m f| \, t^{|m|/k} / \omega_1(t) \times$$

$$\times \omega_3(\rho(x,s)) \} + \sum_{|m|=k} \sup_{x \neq \xi \atop Q} \{ |D_x^m f(t,x) - D_\xi^m f(t,\xi)| \cdot t / \omega_2(t)\, \omega_3(|x-\xi|) \},$$

$\omega_i$ — функция типа модуля непрерывности, $\rho(x, s) = \inf_{y \in} \rho(x, y)$.

Через $\Psi^*(t, x)$ обозначим продолжение $\Psi(t, x)$ с $\Gamma$ в $Q$ с сохранением гладкости и модуля непрерывности.

Перечислим условия на коэффициенты.

$H_1$. $a_{ij}(t, x)$, $b_i(t, x)$, $c(t, x)$ непрерывны в $\overline{Q}$, ограниченные функции с модулем непрерывности по $x$ $\omega(h) = \sup_{Q,\, |x-\xi| \leqslant h} |f(t, x) - f(t, \xi)|$, обладающим свойствами: $\alpha$) $F_1(z) = \int_0^z \omega(h) h^{-1} dh < \infty$, $\beta$) существует $\gamma \in (1/2, 1)$ такое, что $\omega(t) t^{-\gamma} \leqslant C(\gamma) \omega(\tau) \tau^{-\gamma}$ для $0 < \tau < t$.

$H_2$. Дополнительно к $H_1$ модуль непрерывности $\omega(h)$ коэффициентов $a_{ij}(t, x)$ обладает свойством $F_2(z) = \int_0^z F_1(\tau) \tau^{-1} d\tau < \infty$.

2. Основные результаты. С помощью специальных оценок поверхностных параболических потенциалов и однородной матрицы Грина ([4]) уравнения с замороженными коэффициентами, методом Э. Хопфа ([1, 2]) получены следующие результаты.

Теорема 1 (о разрешимости). 1) *Выполнено условие $H_1$, поверхность $S \in C^{(2, \omega)}$.*

*Тогда существует единственное ограниченное классическое решение $u(t, x)$ задачи Дирихле (1)—(3′) при $f^*(t, x) = f(t, x) - L\Psi_1^*(t, x)$, $\varphi^*(x) = \varphi(x) - \Psi_1^*(0, x)$, принадлежащих $C_{\omega, \omega}^{(0, \omega)}(Q)$ и $C^{(0, \omega)}(V)$ соответственно. Решение $u \in C^{(2, F_1)}(Q_1)$, $Q_1 = (0, T) \times V_1$, $\overline{V}_1 \subset V$ и справедливы оценки*

$$|D_x^k u(t, x)| \leqslant C_k (\|\varphi^*\|^{(0, \omega)} + \|f^*\|_{\omega, \omega}^{(0, \omega)}), \quad |k| \leqslant 2.$$

2) *Выполнено условие $H_2$, поверхность $S \in C^{(1, \omega)}$.*

*Тогда существует единственное ограниченное классическое решение $u(t, x)$ задачи Неймана (1)—(3″) при $f \in C^{(0, \omega)}(Q)$, $\varphi \in C(V)$, $a(t, x)$, $\Psi_2(t, x) \in C(\Gamma)$, для которого справедливы оценки*

$$|D^k u(t, x)| \leqslant C(\|\varphi\|_C + \|\Psi\|_C + \|f\|_{0, \omega}) [t^{-|k|/2} + g_k(t, \rho(x, S)],$$

$$g_0(t, \rho) = 1, \quad g_1(t, \rho) = t^{-1/2} \ln 1/\rho, \quad g_2(t, \rho) = t^{-1/2} \rho^{-1}.$$

Теорема 2 (о существовании однородной функции Грина задачи Дирихле). *Выполнено условие $H_2$, поверхность $S_2 \in C^{(1, \overline{\omega})}$.*

*Тогда существует функция Грина $\mathscr{E}(t, x; \tau, \xi)$ однородной задачи Дирихле для уравнения (1), обладающая свойствами:*

1) *Решение задачи* (1)—(3′) *для* $f^* \in C^{(0, \omega)}(Q)$, $\varphi \in C(V)$ дается формулой

$$u(t, x) = \int_V \mathscr{E}(t, x; 0, \xi) \varphi(\xi) d\xi + \int_0^t d\tau \int_V \mathscr{E}(t, x; \tau, \xi) f^*(\tau, \xi) d\xi.$$

2) $\mathscr{E}(t, x; 0, \xi) = Z(t, x; \tau, \xi) - V(t, x; \tau, \xi)$, $Z(t, x; \tau, \xi)$ — *фундаментальное решение (ф.р.) уравнения* (1) ([1]), *а* $V(t, x; \tau, \xi)$ — *решение внешней задачи Неймана для уравнения* (1) (*коэффициенты продолжены с сохранением модуля непрерывности на все пространство*), *для которого справедливы оценки*

$$|D_x^k V(t, x; \tau, \xi)| \leqslant C_k (t-\tau)^{-n/2} g_k (t-\tau, \rho(x, S)) \exp\{-c(|x-\xi|^2 + \\ + \rho^2(x, S)(t-\tau)^{-1}\},$$

*где* $g_2(t, \rho) = t^{-1/2}\rho^{-1}\left[F_2(\rho) + \int\limits_0^\rho \widetilde{\omega}(\tau)\tau^{-1}d\tau\right]$.

3) $\mathscr{E}(t, x; \tau, \xi) = \int\limits_V \mathscr{E}(t, x; \beta, y)\, \mathscr{E}(\beta, y; \tau, \xi)\, dy, \quad \beta \in (\tau, t)$.

При изучении задачи Неймана используется построенное в ([1]) ф.р. и оценки поверхностных параболических потенциалов.

Приведем имеющие на наш взгляд самостоятельный интерес предложения о действии операторов типа поверхностных потенциалов.

Теорема 3. 1) *Пусть функция* $G(t, x)$ *определена в слое* $(0, T) \times \times \mathbf{R}^n$ *и обладает свойствами*

а) $\int G(t, x', 0)\, dx' = 0$,

б) $|D_x^k G(t, x)| \leqslant C_k t^{-(n+|k|+1)/2} \exp\{-c|x^2|t^{-1}\}, \quad |k| = 0, 1$.

*Если* $f(t, x) \in C_x^{(0, \omega)}(\Gamma)$, $S \in C^{(1, \omega)}$, *то функция*

$$u(t, x) = \int\limits_0^t d\tau \int\limits_S G(t-\tau, x-\xi) f(\tau, \xi)\, dS_\xi$$

*принадлежит пространству* $C_x^{(0, F_1)}(\Gamma)$, *а при* $f \in C_{t,x}^{(0,\omega)}(\Gamma)$ *и* $f(0, x)|_{x \in S} = 0$ $u \in C_{t,x}^{(0, F_1)}(Q)$ *и выполняется неравенство*

$$\|u\|_{0, F_1} \leqslant C\|f\|_{0, \omega}.$$

2) *Если* $G(t, x)$ — *ф.р. уравнения* (1) *с постоянными коэффициентами и* $f \in C_{t,x}^{(0,\omega)}(\Gamma)$, *то для* $x \in S$

$$|D_x^2 u(t, x)| \leqslant C\|f\|_{0, \omega} (\omega(\rho(x, S))\rho^{-1}(x, S) + t^{-1/2})\, e^{-c\rho^2(x, S)t^{-1}}.$$

3. Об общей однородной параболической граничной задаче. С помощью однородной матрицы Грина параболической граничной задачи с гёльдеровыми коэффициентами получается

Теорема 4. *Матрицы* $A_k(t, x)$ *удовлетворяют условию* $H_1$ *с модулем непрерывности* $\omega(h)$ *по* $(t, x)$ *в смысле параболического расстояния,* $S \in C^{(2b+\alpha)}$.

*Тогда однородная параболическая граничная задача*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{|k| \leqslant 2b} A_k(t, x) D_x^k u + f(t, x),$$

$$B_\nu(t, x; D)u|_\Gamma = 0,$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in V,$$

*в предположении, что порядки граничных операторов* $r_\nu \leqslant 2b - 1$, *коэффициенты* $B_\nu$ *принадлежат* $C^{(2b-r_\nu+\alpha)}(\Gamma)$, $\varphi \in C^{(0, \omega)}(V)$, $f \in C_{\cdot, \omega}^{(0, \omega)}(Q)$ *имеет в пространстве* $C_{\omega, (F_1(h)+\omega(h)\ln 1/h)^{-1}}^{(2b, F_1(h)+\omega(h)\ln 1/h}(Q) \equiv H$ *единственное решение* $u(t, x)$, *для которого справедлива оценка*

$$\|u\|_H \leqslant C(\|\varphi\|^{(0, \omega)} + \|f\|_{\omega, \omega}^{(0, \omega)}).$$

*Если же для $A_k(t, x)$ выполняется условие $H_2$, то существует матрица Грина $\mathscr{E}(t, x; \tau, \xi)$, с помощью которой решение задачи для любых $\varphi \in C(V)$, $f \in C^{(0,\omega)}_{\omega,1}(Q)$ определяется формулой*

$$u(t, x) = \int\limits_V \mathscr{E}(t, x; 0, \xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_V \mathscr{E}(t, x; \tau, \xi)\,f(\tau, \xi)\,d\xi.$$

Отметим, что теорема 4 является новой и для задач Дирихле и Неймана в случае уравнения (1); она дополняет результаты, изложенные в теоремах 1, 2.

4. Эллиптические уравнения. Используя связь, существующую между решениями параболических и эллиптических уравнений, получаем совершенно аналогичные результаты о разрешимости задач Дирихле и Неймана для равномерно эллиптических уравнений

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x) - \lambda u = f(x),$$

где $\operatorname{Re}\lambda$ — достаточно большое положительное число.

Черновицкий государственный
университет

Поступило
27 XI 1970

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. И. Матийчук, С. Д. Эйдельман, ДАН, 165, № 3, 482 (1965); Тез. докл. Всесоюзн. межвуз. конфер. по применению методов функц. анализа к нелинейным задачам, Баку, 1965, стр. 72; Тр. Воронежск. семинара по функциональному анализу, в. 9, 54 (1967); Укр. матем. журн., 22, № 1, 22 (1970). [2] М. И. Матийчук, С. Д. Эйдельман, Укр. матем. журн., 18, № 2, 22 (1966). [3] М. И. Матийчук, С. Д. Эйдельман, Укр. матем. журн., 29, № 5, 642 (1968). [4] С. Д. Ивасишен, С. Д. Эйдельман, Тез. докл. международн. матем. конгресса, секция 7, М., 1966; Докл. АН УССР, № 7 (1966); ДАН, 172, № 6, 1262 (1967); Тр. Московск. матем. общ., 23 (1970).