Доклады Академии наук СССР
1971. Том 199, № 5

УДК 513.83

МАТЕМАТИКА

ВАН НЫ КЬЮНГ

ПСЕВДОИЗОТОПИЯ ТРЕХМЕРНОЙ СФЕРЫ S^3

(Представлено академиком П. С. Александровым 10 II 1971)

Непрерывное отображение $f\colon M \to M$ топологического многообразия M на себя называется псевдоизотопным тождественному, если существует непрерывное отображение $F\colon M \times I \to M$, где $I = [0, 1]$, такое, что:

1) для каждого $t < 1$ $F / M \times t$ есть гомеоморфизм;
2) $F / M \times 0 = 1$, т. е. $F(x, 0) = x$ для всех $x \in M$;
3) $F / M \times 1$ эквивалентно отображению f.

Известно, что всякое монотонное отображение плоскости на себя псевдоизотопно тождественному (см. [6] и [3] стр. 284). Иначе обстоит дело для $n > 2$. В [2], § 4, Р. Бинг построил отображение $f\colon E^3 \to E^3$ трехмерного эвклидова пространства E^3 на себя, которое не псевдоизотопно тождественному. В этом примере множество всех невырожденных прообразов $f^{-1}(x)$ есть континуум зацепленных восьмерок. Интересно найти необходимое и достаточное условие, чтобы отображение $f\colon E^n \to E^n$ было псевдоизотопным тождественному.

В. П. Компаниец доказал, что если отображение $f\colon S^n \to S^n$ n-мерной сферы S^n на себя псевдоизотопно тождественному, то f клеточно, т. е. прообраз $f^{-1}(\Delta)$ каждой клетки Δ есть клетка (теорема 3, [7]).

Для $n = 3$ в [8] Т. М. Прайс, ссылаясь на один результат Арментроута, доказал, что каждое точечное отображение трехмерной сферы S^3 на себя псевдоизотопно тождественному. (Отображение $f\colon S^n \to S^n$ называется **точечным**, если прообраз $f^{-1}(x)$ каждой точки $x \in S^n$ клеточно вложен в S^n, т. е. $S^n \setminus f^{-1}(x)$ гомеоморфно E^n.) Однако доказательство результата Арментроута, объявленного в [1], пока не появилось.

В этой заметке дается новое простое доказательство теоремы о существовании псевдоизотопии для точечных отображений S^3 на себя.

Теорема. *Для того чтобы непрерывное отображение $f\colon S^3 \to S^3$ было псевдоизотопно тождественному, необходимо и достаточно, чтобы оно было точечно.*

Доказательство. Необходимость следует из теоремы 3 Компанийца [7], потому что каждое клеточное отображение точечно.

Достаточность. Мы будем использовать следующий результат Хэмстром: если $g\colon X \to I$ — $(h\text{-}2)$-регулярное отображение полного метрического пространства X на отрезок $I = [0, 1]$ такое, что каждый прообраз $g^{-1}(t)$ гомеоморфен трехмерной сфере S^3, то X гомеоморфно $S^3 \times I$ и g соответствует естественной проекции $\pi\colon S^3 \times I \to I$ (см. [4] и [5], стр. 38). Отображение $g\colon X \to Y$ называется **$(h\text{-}2)$-регулярным**, если для любой точки $x \in X$ и любого числа ε найдется такое число δ, что всякое непрерывное отображение $\varphi\colon S^n \to O(x, \delta) \cap g^{-1}(y)$ гомотопно нулю в $O(x, \varepsilon) \cap g^{-1}(y)$, где $y \in Y$, $n \leqslant 2$ и $O(x, d)$ обозначает d-окрестность точки x в пространстве X.

Пусть $f\colon S^3 \to S^3$ — точечное непрерывное отображение. Обозначим через G разбиение пространства $S^3 \times I$ на множества $f^{-1}(x) \times 0$, где $x \in S^3 \times 0$ и точки множества $S^3 \times I \setminus S^3 \times 0$. Это разбиение непрерывно. Пусть X — пространство разбиения G и $P\colon S^3 \times I \to X$ — непрерывное отображение, соответствующее разбиению G. Заметим, что $P / S^3 \times 0$ эквивалентно отображению f, поэтому $P(S^3 \times 0)$ гомеоморфно S^3 и $P / S^3 \times t$ есть гомеоморфизм, если $0 < t \leqslant 1$.

Теперь определяем отображение g: $X \to I$, так что диаграмма

$$\begin{tikzcd} S^3 \times I \arrow[r, "P"] \arrow[dr, "\pi"'] & X \arrow[d, "g"] \\ & I \end{tikzcd}$$

коммутативна, где π — естественная проекция, т. е. $\pi(x, t) = t$ для всех $x \in S^3$ и $t \in I$. Тогда каждый прообраз $g^{-1}(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, есть топологическая трехмерная сфера $P(S^3 \times t)$.

Докажем, что отображение g $(h\text{-}2)$-регулярно. Очевидно, что нам надо только доказать это для тех точек, которые лежат в $g^{-1}(0) = P(S^3 \times 0)$. Пусть x — такая точка, $x \in P(S^3 \times 0)$. Так как $P(S^3 \times 0)$ гомеоморфно S^3, то найдется число $\varepsilon' \leqslant \varepsilon$ такое, что $O(x, \varepsilon') \cap P(S^3 \times 0)$ содержится в шаровой окрестности U точки x в $P(S^3 \times 0)$ и $U \subset O(x, \varepsilon) \cap P(S^3 \times 0)$. Множество $P^{-1}(x)$ клеточно лежит в $S^3 \times 0$, поэтому существует такая 3-клетка Δ в $S^3 \times 0$, что $P^{-1}(x) \subset \Delta$ и $P(\Delta) \subset O(x, \varepsilon')$. Пусть θ и δ— такие числа, что $O(x, \delta) \subset P(\Delta \times [0, \theta]) \subset O(x, \varepsilon')$. Для каждого $t \in [0, 1]$, если $g^{-1}(t)$ пересекается с множеством $O(x, \delta)$, то $0 \leqslant t < \theta$, поэтому $g^{-1}(t) \cap O(x, \delta) \subset P(\Delta \times t) \subset O(x, \varepsilon') \subset O(x, \varepsilon)$. Если $t > 0$, то $P(\Delta \times t)$ есть клетка в $P(S^3 \times t)$, поэтому всякое отображение φ: $S^n \to g^{-1}(t) \cap O(x, \delta)$ гомотопно нулю в $P(\Delta \times t)$, следовательно, в $g^{-1}(t) \cap O(x, \varepsilon)$. Если $t = 0$, то всякое отображение φ: $S^n \to g^{-1}(0) \cap O(x, \delta)$ гомотопно нулю в шаровой окрестности U и, следовательно, в $g^{-1}(0) \cap O(x, \varepsilon)$. Таким образом, отображение g $(h\text{-}2)$-регулярно.

По результату Хэмстром, пространство X гомеоморфно $S^3 \times I$ и отображение g соответствует проекции π, т. е. существует гомеоморфизм H: $X \to S^3 \times I$ такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "H"] \arrow[dr, "g"'] & S^3 \times I \arrow[d, "\pi"] \\ & I \end{tikzcd}$$

коммутативна. Отсюда следует, что отображение HP: $S^3 \times I \to S^3 \times I$ гомеоморфно отображает каждую сферу $S^3 \times t$ на себя, если $0 < t \leqslant 1$ и эквивалентно отображению f на $S^3 \times 0$.

Пусть $\psi = (HP)^{-1} / S^3 \times 1$. Определяем гомеоморфизм Ψ: $S^3 \times I \to S^3 \times I$ и отображение F_1: $S^3 \times I \to S^3 \times I$ следующим образом:

$$\Psi(x, t) = (\psi(x), t), \quad x \in S^3, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1;$$

$$F_1(x, t) = \Psi HP(x, 1 - t), \quad x \in S^3, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Нетрудно проверить, что отображение $F = \pi F_1$: $S^3 \times I \to S^3$ есть псевдоизотопия, переводящая тождественное отображение в f.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
30 I 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] S. Armentrout, Bull. Am. Math. Soc., 75, 453 (1969). [2] R. H. Bing, Topology of 3-Manifolds and Related Topics, 1962. [3] R. H. Bing, Ann. Math., 64, 279 (1965). [4] M. E. Hamstrom, Ill. J. Math., 7, 503 (1963). [5] M. E. Hamstrom, Mem. Am. Math. Soc., № 40 (1961). [6] E. E. Floyd, M. K. Fort jr., Proc. Ann. Math. Soc., 4, 828 (1953). [7] В. П. Компаниец, Укр. матем. журн., № 6, 100 (1965). [8] T. M. Price, Trans. Am. Soc., 140, 295 (1969).