Доклады Академии наук СССР
1971. Том 199, № 5

УДК 517.39+519.4+517.91+513.88 *МАТЕМАТИКА*

А. М. ВЕРШИК

НЕИЗМЕРИМЫЕ РАЗБИЕНИЯ, ТРАЕКТОРНАЯ ТЕОРИЯ, АЛГЕБРЫ ОПЕРАТОРОВ

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 18 II 1971)

1. Имеются две группы поводов к систематическому рассмотрению некоторых неизмеримых разбиений пространств с мерой. Первая — внутренние поводы в самой теории меры и теории динамических систем: траекторная теория (изучение динамической системы с точностью до разбиения пространства на траектории, см. п. 3), теория пересечений разбиений, слоения в гладких системах, проблема изоморфизма для преобразований с квазиинвариантной мерой (с включением задачи о существовании инвариантных мер) и др. Параллельно с этим давно замечено возникновение неизмеримых разбиений в теории W^*-алгебр операторов и прежде всего скрещенных произведений *. Этот параллелизм не случаен, так как теперь ясно, что теория скрещенных произведений C^*, W^*-алгебр широкого класса является по сути дела функциональной переформулировкой теории неизмеримых разбиений **.

Операторные соображения, идущие от работ фон Неймана [1] и развитые в интересных исследованиях Дая [2], получили сейчас широкую известность [3, 4]. Однако «метрическая» сущность операторных конструкций (также подмеченная фон Нейманом) остается до сих пор в тени. Между тем метрический подход проясняет принципиальную и упрощает техническую сторону вопроса. В последнее время в связи с успехами в теории факторов [5, 6] появились работы метрического содержания по преимуществу [6, 7] ***.

В этой работе определяется важнейший класс неизмеримых разбиений и устанавливаются общие связи с траекторной теорией и теорией алгебр операторов. Изучение вводимого класса разбиений позволяет решить некоторые метрические задачи, и помогает исследовать диагонализуемые гиперконечные факторы, что будет сделано в дальнейших публикациях.

2. Ручные разбиения. Произвольное разбиение пространства Лебега называется **ручным**, если оно есть теоретико-множественное

---

* Например, в разложении левого регулярного представления некоторых групп типа II по подкольцу, натянутому на правое представление коммутативного нормального делителя, объединение эквивалентных неприводимых представлений приводит к неизмеримому разбиению в базе соответствующего прямого интеграла. Этот пример типичен.

** Функциональный аналог теории меры есть теория унитарного кольца L^2 (и других колец измеримых функций), или теория максимальных симметричных коммутативных подалгебр в алгебре всех ограниченных операторов гильбертова пространства. Если при этом понятию измеримого разбиения соответствует понятие симметричного подкольца, то для неизмеримого разбиения здесь нет естественного аналога. Он появляется при переходе от алгебр типа I к алгебрам типа II и III (см. п. 4).

*** См. также [8]. Концепцию виртуальных подгрупп по Макки [9], по-видимому, также нужно отнести к попыткам изучения неизмеримых (траекторных) разбиений.

пересечение * монотонно убывающей последовательности измеримых разбиений $ю = \bigcap_{n=1}^{\infty} \xi_n$, $\xi_n > \xi_{n+1}$, $n = 1, \ldots$ (определение измеримого разбиения см. в [10]). Ручное разбиение однородно, если существует такое его представление, в котором для всякого n все mod 0 точки имеют одинаковую условную меру в элементах ξ_n; это определение согласуется с определением однородности в п. 3.

Класс ручных разбиений — самый простой класс, включающий наряду с измеримыми и неизмеримые разбиения. Он введен автором в 1966 г. (см. [11]). Разумеется, им не исчерпываются все разумные неизмеримые разбиения, возникающие в приложениях (см. п. 3). Метод изучения ручных разбиений состоит в исследовании убывающих последовательностей измеримых разбиений и, в первую очередь, поведения их условных мер. Другой подход в [7].

Теорема 1 (о стандартной форме). *Всякое ручное разбиение* ю *пространства Лебега* (X, μ) *представимо в форме* $ю = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigvee_{i=n}^{\infty} \eta_i$, *где все* η_i *при* $i \geqslant 2$ — *конечные разбиения и* $\bigvee_{i=1}^{\infty} \eta_i = \varepsilon$ (= *разбиение на точки*).

Если элементы ю — *счетные множества, то и* η_1 *конечно.*

Наглядный смысл теоремы в том, что всякое ручное разбиение может быть реализовано как разбиение пространства последовательностей с некоторой борелевской мерой, где одному элементу этого разбиения принадлежат все последовательности, совпадающие, начиная с некоторого номера, а координаты, начиная со второй последовательности, могут принимать конечное число значений. Теорема доказывается на основе леммы, аналогичной теореме о лакунарном изоморфизме [11]. Представление в теореме, конечно, неединственно.

Следствия. 1.1. *Тип ручного однородного разбиения* $ю = \bigcap_{n=1}^{\infty} \xi_n$ *определяется типами конечных отрезков последовательности* $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ (*которые еще не определяют тип всей последовательности* $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ (*см.* [12]), *если* $\bigwedge_{n=1}^{\infty} \xi_n = \nu$.

1.2. *Существует одно, с точностью до сохраняющего меру изоморфизма, однородное ручное абсолютно неизмеримое*** *разбиение со счетными* (*континуальными*) *элементами* [11].

1.3. *Всякое ручное разбиение есть разбиение на траектории для некоторого преобразования с квазиинвариантной мерой и двоично-рациональным спектром.*

Классификация ручных разбиений с точностью до преобразований, сохраняющих меру, необозрима; напротив, их классификация с точностью до преобразований с квазиинвариантной мерой может быть совершена в эффективных терминах. Так, конструктивный ответ можно дать для бернуллиевских ручных разбиений, т. е. тех, у которых в представлении по теореме 1 все η_i независимы. Отсюда получается критерий алгебраической эквивалентности продакт-состояний для UHF-алгебр.

3. Траекторная теория. Чаще всего неизмеримое разбиение возникает как траекторное разбиение. Пусть G — группа, действующая на пространстве Лебега с квазиинвариантной мерой. Разбиение на траектории действия G — я(G), вообще говоря, неизмеримо (например, если G действует свободно, т. е. $\mu\{x: \exists g \neq e,\ gx = x\} = 0$, и сохраняет меру, то

---

* В отличие от измеримого пересечения [10], которое есть измеримая оболочка теоретико-множественного пересечения. Неизмеримые разбиения мы обозначаем последними буквами русского алфавита.

** Измеримая оболочка тривиальна. Следствие 1.2 верно и для пространств Лебега с σ-конечной мерой.

я(G) измеримо лишь, если G компактно). Траекторный изоморфизм двух динамических систем (X, μ, G) и (X', μ', G') определяется как изоморфизм X и X', сохраняющий меру (тип меры) и переводящий я(G) в я(G'). Траекторная теория изучает динамическую систему «с точностью до измеримой замены времени», т. е. до траекторного изоморфизма. я(G) однородно по определению, если G сохраняет меру.

Теорема 2. *Для того чтобы* я(G) *было ручным (по терминологии Дая* (2), *G аппроксимативно конечно), необходимо и достаточно, чтобы для любых $g_1, \ldots, g_k \in G$ и $\varepsilon > 0$ существовало измеримое разбиение ξ с элементами из n точек и периодические автоморфизмы $t_1, \ldots, t_k$ такие, что* я$(t_i) > \xi$, $\mu\{x: t_i x \neq g_i x\} < \varepsilon$, $i = 1 \ldots k$.

Из этого очевидного факта, а также того, что для коммутативных групп условие теоремы есть классическая формулировка об аппроксимации периодическими автоморфизмами, вытекает

Следствие 2.1. *Если G коммутативно, то* я(G) *ручное.*

Из следствия 1.2 немедленно получается

Следствие 2.2. *Все динамические системы (X, μ, G), для которых* я(G) *ручное, G сохраняет меру, счетна и действует эргодически, траекторно изоморфны.*

Соединение следствий 2.1 и 2.2 дает траекторный изоморфизм счетных эргодических коммутативных групп (случай $G = Z$ доказан в (2, 11, 13), это ответ на вопрос, поднимавшийся В. А. Рохлиным).

Теорема 3. *Если* я(G) *ручное и G действует свободно, то G имеет инвариантное среднее.*

Эта теорема доказывается с помощью условия Фельнера и дает возможность строить большое количество примеров неручных траекторных разбиений *. Она анонсирована в (14).

О неручных однородных разбиениях известно не многое (2, 15). По-видимому, верно обращение теоремы 3. Пока в этом направлении доказано следующее. Пусть $g_1, \ldots, g_r$ — образующие счетной группы G и число слов длины n от переменных $g_1, \ldots, g_r$ не превосходит $P(n)$, где $P(\cdot)$ — некоторый полином от n. Тогда при любом действии G я(G) ручное. Близкое условие дал Дай (2); приведенный факт получается на ином пути.

4. Алгебры операторов. Пусть в сепарабельном гильбертовом пространстве H задан фактор $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{M}$ — его регулярная подалгебра по Диксмье (т. е. такая максимальная самосопряженная коммутативная подалгебра в $\mathfrak{A}$, что группа $G(\mathfrak{M})$ всех внутренних автоморфизмов $\mathfrak{A}$, оставляющая $\mathfrak{M}$ на месте, порождает $\mathfrak{A}$). С парой $(\mathfrak{A}, \mathfrak{M})$ можно связать траекторное разбиение я$(\mathfrak{A}, \mathfrak{M})$ группы $G(\mathfrak{M})$ (полной группы по (2)) как группы автоморфизмов пространства Лебега с квазиинвариантной мерой (X, μ), где $\mathfrak{M} = L^\infty(X, \mu)$.

Теорема 4. *Тип* я$(\mathfrak{A}, \mathfrak{M})$ *(с точностью до преобразований с квазиинвариантной мерой) есть алгебраический инвариант $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{A}$; он образует полную систему инвариантов, если $\mathfrak{M}$ — картановская подалгебра.*

Картановской мы называем регулярную подалгебру, для которой существует тотальный $f \in H$, $\|f\| = 1$ и $(AMf, f) = (MAf, f)$ для всех $M \in \mathfrak{M}$ и $A \in \mathfrak{A}$. В факторах типа II_1 всякая регулярная подалгебра — картановская. Из результатов пп. 2 и 3 вытекает

Теорема 5. *Если* я$(\mathfrak{A}, \mathfrak{M})$ *ручное, то $\mathfrak{A}$ — гиперконечный фактор.*

Для $\mathfrak{A}$ типа II_1 эта теорема анонсирована фон Нейманом и доказана Даем (2). Приведенный путь значительно проще и охватывает факторы типа III. Из следствия 1.2 получается

Следствие 5.1 (фон Нейман). *Все гиперконечные факторы типа II_1 изоморфны.*

---

* Простейший пример — разбиение тора на траектории группы всех алгебраических автоморфизмов.

Приведенный инвариант позволяет получать различные примеры неизоморфных регулярных подалгебр в факторах типа III.

Перечислим несколько проблем, от решения которых зависит взаимодействие теорий меры и алгебр операторов.

I. (Дай). Будет ли ручным $\varkappa(\mathfrak{A}, \mathfrak{M})$, где $\mathfrak{M}$ — произвольная регулярная подалгебра гиперконечного фактора II_1?

II. Можно ли построить по образцу Макдафф ([16]) континуум неизоморфных однородных разбиений?

III. Во всяком ли гиперконечном факторе существует картановская подалгебра? Эта существеннейшая проблема относится, по существу, к теории состояний на UHF-алгебрах ([5]).

IV. Существуют ли регулярные (картановские) подалгебры в общих факторах, в частности, в новейших примерах типа II_1 ([16]).

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
13 II 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. v. Neumann, F. Murray, Ann. Math., 44, 716 (1943). [2] H. A. Dye, Am. J. Math., 85, 551 (1963). [3] W. Arveson, Acta Math., 118, 95 (1967). [4] G. Zeller-Meier, J. math. pures et appl., 47, 103 (1968). [5] R. Powers, Ann. Math., 86, 138 (1967). [6] H. Araki, E. Woods, Publ. RIMS, Kyoto Univ., 4, 51 (1968). [7] W. Krieger, Lecture Notes, 160, 158 (1970). [8] C. Moore, Proc. Fifth Berkeley Symp., 2, 11, 1967. [9] G. Mackey, Math. Ann., 166, 187 (1966). [10] В. А. Рохлин, Матем. сборн., 67, № 1 (1949). [11] А. М. Вершик, Функциональн. анализ, 2, № 3 (1968). [12] А. М. Вершик, ДАН, 193, № 4 (1970). [13] Р. М. Белинская, Функциональн. анализ, 2, № 3 (1968). [14] А. М. Вершик, С. А. Юзвинский, Итоги науки. Математический анализ, 1967, 1969. [15] W. Krieger, Math. Zs., 103, 78 (1968). [16] D. McDuff, Ann. Math., 90, 372 (1969).