Доклады Академии наук СССР
1971. Том 199, № 5

УДК 517.544.3 *МАТЕМАТИКА*

В. С. ВИНОГРАДОВ

ОБ ОДНОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ, НЕ ИМЕЮЩЕЙ НЁТЕРОВЫХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ

(Представлено академиком В. С. Владимировым 17 II 1971)

Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение для кватернионнозначной функции:

$$\partial_z U = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i\frac{\partial}{\partial x_2} + j\frac{\partial}{\partial x_3} + k\frac{\partial}{\partial x_4}\right)(u_1 + iu_2 + ju_3 + ku_4) = F. \tag{1}$$

Здесь i, j, k — кватернионные единицы с обычными правилами умножения: $ij = -ji = k$, $i^2 = j_2 = -1$. Это уравнение эквивалентно эллиптической системе для вектора $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$

$$\left(E\frac{\partial}{\partial x_1} + I\frac{\partial}{\partial x_2} + J\frac{\partial}{\partial x_3} + K\frac{\partial}{\partial x_4}\right)\mathbf{u} = F, \tag{2}$$

где

$$E = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & & \\ 1 & 0 & & \\ & & 0 & -1 \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} & & -1 & 0 \\ & & 0 & 1 \\ 1 & 0 & & \\ 0 & -1 & & \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} & & & -1 \\ & & -1 & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}$$

Система (1), (2) рассматривалась в работах [1-2]. Здесь будет рассмотрена граничная задача для этой системы. В случае постоянных коэффициентов в граничном условии будет дано явное ее решение, а для переменных коэффициентов другим путем доказывается известный факт [2], что у системы (1) нет нётеровых граничных задач.

Итак, будем искать решения нашей системы в некоторой конечной и односвязной области D с границей S, гладкой по Ляпунову, которые удовлетворяют граничному условию

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}_1, \mathbf{u}) &= a_{11}u_1 + a_{12}u_2 + a_{13}u_3 + a_{14}u_4 = \varphi_1, \\ (\mathbf{a}_2, \mathbf{u}) &= a_{21}u_1 + a_{22}u_2 + a_{23}u_3 + a_{24}u_4 = \varphi_2. \end{aligned} \tag{3}$$

Рассмотрим сначала случай, когда коэффициенты матрицы граничного условия постоянны и ранг ее равен двум. Линейными преобразованиями уравнений (3) всегда можно добиться того, чтобы векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ были ортонормированы. Дополним затем систему векторов $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ до ортонормированного базиса $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4\}$ и рассмотрим матрицу G, строками которой являются координаты векторов $\mathbf{a}_k$. Эта матрица будет ортогональной и поэтому, согласно теореме Кэли [3], преобразование, осуществляемое ею, можно представить кватернионным умножением

$$\mathbf{w} = G\mathbf{u} \Leftrightarrow W = aUb, \tag{4}$$

где a и b — некоторые кватернионы с нормой, равной единице.

Делая замену (4), для W получаем граничную задачу

$$\partial_z a^{-1}Wb^{-1} = F, \tag{5}$$

$$w_1 = \varphi_1, \quad w_2 = \varphi_2 \text{ на } S. \tag{6}$$

В дальнейшем нам будут удобны следующие обозначения:

$$W = w_{12} + w_{34}j = w_{12} + j\overline{w}_{34}, \ [W]_{\alpha\beta} = w_{\alpha\beta},$$

$$w_{12} = w_1 + iw_2, \quad w_{34} = w_3 + iw_4;$$

$$\partial_z = 2\left(\frac{\partial}{\partial\overline{z}_{12}} + j\frac{\partial}{\partial z_{34}}\right), \quad \frac{\partial}{\partial\overline{z}_{12}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i\frac{\partial}{\partial x_2}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial z_{34}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_3} - i\frac{\partial}{\partial x_4}\right),$$

$$\partial_{\overline{z}} = \frac{\partial}{\partial x_1} - i\frac{\partial}{\partial x_2} - j\frac{\partial}{\partial x_3} - k\frac{\partial}{\partial x_4}.$$

Найдем ядро задачи (5), (6), т. е. пространство решений соответствующей однородной задачи. Так как в этом случае компоненты W — гармонические функции, из граничного условия будет следовать, что $w_{12} = 0$ в D. Отсюда компонента w_{34} удовлетворяет уравнению

$$\partial_z a w_{34} j b = 0$$

или системе двух комплексных уравнений

$$\begin{aligned} \alpha_1 \, \partial w_{34} / \partial\overline{z}_{12} - \alpha_2 \, \partial w_{34} / \partial\overline{z}_{34} = 0, \\ \alpha_2 \, \partial w_{34} / \partial z_{12} + \alpha_1 \, \partial w_{34} / \partial z_{34} = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

(мы обозначили $a^{-1} = \alpha_1 + j\alpha_2$). Общим решением ее будет

$$w_{34} = f(\alpha_2\overline{z}_{12} + \alpha_1\overline{z}_{34}, \ \alpha_1 z_{12} - \alpha_2 z_{34}), \tag{8}$$

где $f(\omega_1, \omega_2)$ — произвольная аналитическая функция двух комплексных переменных. Отсюда видно, что ядро задачи (5), (6) бесконечномерно, а для задачи (1), (3) справедлива.

Теорема 1. *Ядро задачи* (1), (3) *бесконечномерно и состоит из кватернионов вида*

$$U = af(\alpha_2\overline{z}_{12} + \alpha_1\overline{z}_{34}, \ \alpha_1 z_{12} - \alpha_2 z_{34})jb, \tag{9}$$

где $f(\omega_1, \omega_2)$ — произвольная аналитическая функция двух комплексных переменных.

Перейдем теперь к исследованию неоднородной задачи, причем сначала будем предполагать F и φ_k достаточно гладкими функциями. Легко видеть, что решение (5), (6) есть решение задачи

$$\Delta W = a\partial_{\overline{z}} F b, \quad w_{12} \,|\, S = \varphi_{12}.$$

Отсюда можно определить w_{12}, оно выражается с помощью функции Грина $G(P, Q)$ задачи Дирихле для области D в виде

$$w_{12} = L(F, \varphi_{12}) = \int\limits_D G(P, Q) \, [a\partial_{\overline{z}} F b]_{12} \, dv_Q + \int\limits_S \frac{\partial G}{\partial n} \varphi_{12}(Q) \, ds_Q. \tag{10}$$

Подставив это выражение в (5), будем иметь для w_{34} кватернионное уравнение

$$\partial_z a w_{34} j b = F - \partial_z a L(F, \varphi_{12}) b,$$

эквивалентное неоднородной системе (7):

$$\begin{aligned} \alpha_1 \, \partial w_{34} / \partial\overline{z}_{12} - \alpha_2 \, w_{34} / \partial\overline{z}_{34} = \Phi_{12}, \\ \alpha_2 \, \partial w_{34} / \partial z_{12} + \alpha_1 \, \partial w_{34} / \partial z_{34} = \Phi_{34}, \end{aligned} \tag{7'}$$

$$\Phi_{ij} = [F - \partial_z a L(F, \ \varphi_{12}) \, b]_{ij}.$$

Для ее разрешимости необходимо и достаточно выполнение условия

$$\alpha_2 \partial\Phi_{12} / \partial z_{12} + \alpha_1 \partial\Phi_{12} / \partial z_{34} = \alpha_1 \partial\Phi_{34} / \partial\bar{z}_{12} - \alpha_2 \partial\Phi_{34} / \partial\bar{z}_{34}. \qquad (11)$$

Если это условие выполнено, то с помощью замены переменных и квадратур можно найти частное решение (7′), а затем, привлекая (8), и общее решение.

Условие (11) позволяет нам описать коядро задач (5), (6) и (1), (3). В самом деле, если подставить в (11) выражения для Φ_{ij} через F и φ_{12} из (7) и (10), то операторы, получающиеся в его правой и левой частях, допускают расширение до линейных ограниченных операторов, действующих при $F \in L_p(D)$, $\varphi_{12} \in W_p^{(1-1/p)}(S)$ при $p > 4$. Отсюда получается исследование разрешимости нашей граничной задачи в пространстве $W_p^{(1)}(D)$. Причем условия разрешимости содержат сингулярные интегральные операторы, которые не могут быть конечного ранга.

Теорма 2. *Для разрешимости задач* (5), (6) *и* (1), (3) *необходимо и достаточно выполнение условия*

$$(\alpha_2 \partial / \partial z_{12} + \alpha_1 \partial / \partial z_{34}) [F - \partial_z a L(F, \varphi_{12}) b]_{12} =$$
$$= (\alpha_1 \partial / \partial\bar{z}_{12} - \alpha_2 \partial / \partial\bar{z}_{34}) [F - \partial_z a L(F, \varphi_{12}) b]_{34}.$$

Коядро этих задач бесконечномерно.

Перейдем теперь к исследованию граничной задачи с переменными коэффициентами. Для этого возьмем некоторую точку P_0 на границе области D, «заморозим» в ней коэффициенты граничного условия и рассмотрим граничую задачу (1), (3) с постоянными коэффициентами $a_{ij}^0 = a_{ij}(P_0)$ в полупространстве Π_{P_0}, границей которого является плоскость T_{P_0}, касательная к S в точке P_0, и расположенном в сторону внутренней нормали к S.

Лемма. *Для нётеровости задачи* (1), (3) *необходимо и достаточно, чтобы для любой точки P_0 граничная задача* (1), (3) *в Π_{P_0} с «замороженными» коэффициентами имела единственное решение, стремящееся к нулю, когда нормальная координата стремится к бесконечности, при $F \in S(\Pi_{P_0})$, $\varphi_{12} \in S(T_{P_0})$; $S(\Pi_{P_0})$ и $S(T_{P_0})$ — пространства основных функций Л. Шварца в соответствующих областях.*

Доказательство. Сделав преобразование Фурье по касательным координатам, получим, что наше условие эквивалентно условию Лопатинского. Затем используем результаты ([6], [7]) об эквивалентности этого условия нётеровости граничной задачи при $F \in L_p(D)$, $\varphi_{12} \in W_p^{(1-1/p)}(S)$.

Теорема 3. *Система* (1) *не имеет нётеровых граничных задач.*

Доказательство. В самом деле, для любого полупространства решение соответствующей однородной задачи с «замороженными» коэффициентами, согласно теореме 1, выражается через произвольную аналитическую функцию двух комплексных переменных в некотором полупространстве, стремящуюся к нулю по некоторому направлению. Ядро такой задачи бесконечномерно. Отсюда и из леммы следует нётеровость любой задачи (1), (3) с переменными коэффициентами.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
8 II 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] R. Fueter, Comm. Math. Helv., 4, 13 (1932); 7, 307 (1935); 8, 371 (1936). [2] М. З. Соломяк, ДАН, 150, № 1, 48 (1963). [3] В. С. Виноградов, ДАН, 154, № 1, 16 (1964). [4] Ю. В. Линник, УМН, 4, в. 5, 49 (1949). [5] С. М. Никольский, УМН, 16, 5 (101), 63 (1961). [6] Л. Р. Волевич, Матем. сборн., 68, № 3, 373 (1965). [7] М. С. Агранович, УМН, 20, в. 5, 3 (1965).