Доклады Академии наук СССР
1971. Том 198, № 3

УДК 532+517.948.34 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

В. А. ПРОКОФЬЕВ

ВОЗМУЩЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ В ПЬЕЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

(Представлено академиком Л. И. Седовым 9 XII 1970)

1. Уравнения притока тепла, неразрывности и состояния, описывающие малые возмущения [1] равновесной пьезотропной [2] сжимаемой жидкости, сводятся (в обозначениях статьи [1]) к одному безразмерному уравнению для возмущения температуры (u)

$$\Lambda(u) \equiv \Lambda_0(u) + {}^1/_4\zeta R(u) = 0,$$
$$\Lambda_0(u) = a^2\Delta u - \partial u / \partial t,\quad \zeta = Z / v,\quad a^2 = \theta / v^2,\quad v = L / (c_0 t_0). \tag{1}$$

Это линейное интегро-дифференциальное уравнение с дифференциальным оператором $\Lambda_0(u)$ параболического типа. Оно описывает возмущения температурного поля также в несжимаемой жидкости и в твердом теле. Учтены эффекты переноса тепла молекулярной теплопроводностью и механизмами термической эмиссии и абсорбции радиационной энергии средой и граничными поверхностями (в дальнейшем считаются черными).

2. Задача Коши для уравнения (1) в слое H: найти непрерывную в $\overline{H}$ функцию, удовлетворяющую в H уравнению (1) и условию

$$t = 0,\quad u(x, t) = \psi(x), \tag{2}$$

где $H = E \times (0, t^0]$, $\overline{H} = E \times [0, t^0]$, E — эвклидово пространство точек $x \equiv (x_1, x_2, x_3)$, ψ — заданная функция.

Решение задачи Коши с помощью трехкратного преобразования Фурье получается в виде

$$u(x, t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi(\xi)\, v(\xi - x, t)\, d\xi \equiv \mathcal{E}_t \psi(x); \tag{3}$$

$$v(\xi - x, t) = \frac{1}{\pi^3}\iiint\limits_0^\infty e^{-g(\lambda)t} \cos[\lambda_1(\xi_1 - x_1)] \times$$
$$\times \cos[\lambda_2(\xi_2 - x_2)] \cos[\lambda_3(\xi_3 - x_3)]\, d\lambda_1 d\lambda_2 d\lambda_3; \tag{4}$$

$$g(\lambda) = a^2\lambda^2 + g_1(\lambda),\quad \lambda^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2;$$
$$g_1(\lambda) = \zeta \int\limits_{(\nu)} a_\nu \tau_{\nu 0} \left(1 - \frac{\tau_{\nu 0}}{\lambda} \operatorname{arc\,tg} \frac{\lambda}{\tau_{\nu 0}}\right) d\nu. \tag{5}$$

Функция $\exp[-g(\lambda)t + ix\lambda]$ — решение задачи Коши при $\psi(x) = \exp(ix\lambda)$. Функция источника $v(\xi - x, t)$ — фундаментальное решение уравнения (1), решение задачи Коши с начальной функцией $v(\xi - x, 0) = \delta(\xi - x)$ — дельта-функция.

Классическими методами теории теплопроводности [3,4] доказывается, что если функция $\psi(x)$ непрерывная и ограниченная, то при $t > 0$ формулой (3) изображается сколько угодно раз дифференцируемая ограниченная функция, интеграл в операторе $R(u)$ существует и является непрерывной ограниченной функцией x, t, при $t > 0$ удовлетворяется уравнение, а при $t=0$ — условие (2). Решение (3) единственное, непрерывно зависит от начальной функции, при $t\to\infty$ стремится к нулю равномерно по x.

Функция (3) — единственное ограниченное решение задачи (1), (2) и в случае, когда $\psi(x)$ абсолютно интегрируема в E, а также когда $\psi(x)$ — кусочно-непрерывная ограниченная на каждом интервале $[\alpha, \beta]\subset E$ функция, непрерывная в точках непрерывности $\psi(x)$.

Интегралом (3) представляется единственное непрерывное решение задачи Коши и для непрерывных начальных функций, растущих при $r\to\infty$ не быстрее $r^n \exp(\beta r)$, где n, $\beta<\tau_{v0}\neq 0$ — положительные константы.

3. Формулой (3) определяется, как и в случае уравнения теплопроводности ([5]), непрерывная функция и для комплексных x, t $\operatorname{Re} t>0$. Всякое равномерно ограниченное непрерывное при вещественных x и $t\geqslant 0$ решение уравнения (1) является аналитическим для комплексных x и t при $\operatorname{Re} t>0$. Решение $u(x, t)$ является аналитической функцией от x при фиксированном действительном $t>0$, даже если не требовать равномерной ограниченности $u(x, t)$ при действительных x.

С помощью оператора $\mathscr{E}_t$ ограниченные непрерывные функции от x переходят в целые аналитические функции, ограниченные в случае действительных x. Операторы $\mathscr{E}_t$ обладают полугрупповым свойством $\mathscr{E}_{t+s} = \mathscr{E}_t\mathscr{E}_s$; $s, t>0$, в частности

$$v(x, t+s)=\mathscr{E}_t v(x, s). \qquad (6)$$

В общем случае продолжение задачи Коши в сторону отрицательных t невозможно, оператор $\mathscr{E}_t$ необратим.

Из (3) видно, что возмущение в любой точке мгновенно сказывается всюду, что является следствием закона теплопроводности Фурье и пренебрежения в уравнении притока тепла членами, содержащими скорость света в знаменателе.

4. Уравнение (1) в случае безграничной среды имеет интегралы

$$\exp[-g(\lambda)t+i\lambda x], \quad \exp[-g(\lambda)t]\sin(\lambda r)/r, \quad \exp[-g(\lambda)t]J_0(\lambda r) \qquad (7)$$

в декартовых, сферических и цилиндрических координатах соответственно; λ — действительный параметр, $g(\lambda)$ — четная неотрицательная монотонно возрастающая функция.

Для одномерных начальных функций решения задачи Коши описывают плоские, сферические или цилиндрические волны и получаются из (3) и (4) преобразованием Фурье, синус-преобразованием Фурье или преобразованием Ханкеля уравнения (1) в декартовых, сферических или цилиндрических координатах, соответственно для плоско-, сферически- или цилиндрически-симметричных решений в виде

$$u(x, t)=\int_{-\infty}^{\infty}\psi(\xi)\,v(x-\xi, t)\,d\xi, \quad v(x-\xi, t)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}e^{-g(\lambda)t}\cos[\lambda(x-\xi)]\,d\lambda,$$

$$u(r, t)=\int_0^{\infty}\psi(\xi)\,v(\xi, r, t)\,d\xi, \quad v(\xi, r, t)=\frac{2}{\pi r}\int_0^{\infty}e^{-g(\lambda)t}\,\xi\sin(\lambda r)\sin(\lambda\xi)\,d\lambda, \qquad (8)$$

$$u(r, t)=\int_0^{\infty}\psi(\xi)\,v(\xi, r, t)\,d\xi, \quad v(\xi, r, t)=\int_0^{\infty}e^{-g(\lambda)t}\lambda J_0(\lambda r)\,\xi J_0(\lambda\xi)\,d\lambda.$$

Из (8) получаются функции влияния мгновенных источников: 1) точечного, сферического и шарового радиусов r_0, 2) линейного, цилиндрического поверхностного и объемного радиусов r_0, 3) плоского поверхностного и плоского слоя (объемного) толщиною $2x_0$. Эти соответственно сферически-, цилиндрически- и плоско-симметричные решения, имеют вид

(Q — соответствующие интенсивности источников)

$$1)\qquad u=\frac{1}{\pi}\chi\left\{\frac{\lambda}{r}\sin\lambda r\right\},\quad \frac{1}{\pi}\chi\left\{\frac{\sin\lambda r_0}{r_0}\,\frac{\sin\lambda r}{r}\right\},$$

$$4\chi\left\{\frac{\sin\lambda r}{r}\,\frac{\sin\lambda r_0-\lambda r_0\cos\lambda r_0}{\lambda^2}\right\},\quad \chi\{\varphi\}\equiv\frac{Q}{2\pi}\int\limits_0^\infty e^{-g(\lambda)t}\varphi(\lambda)\,d\lambda;\tag{9}$$

$$2)\qquad u=\chi\{\lambda J_0(\lambda r)\},\quad 4r_0\chi\{\lambda J_0(\lambda r_0)J_0(\lambda r)\},\quad 4r_0\chi\{J_0(\lambda r)J_1(\lambda r_0)\};$$

$$3)\qquad u=2\chi\{\cos\lambda x\},\quad 4\chi\left\{\sin\lambda x_0\frac{\sin\lambda x}{\lambda}\right\}.$$

С помощью (9) можно построить решения — функции влияния действующих на конечном интервале времени или постоянно действующих источников, а также их распределений с постоянной или переменной интенсивностью вдоль линий, поверхностей или в объемах.

Таким же образом можно конструировать решения, исходя из интеграла уравнения (1) в виде диполя

$$u(x,t)=\chi\left\{\lambda\frac{\partial}{\partial s}\frac{\sin\lambda R}{\pi R}\right\},\tag{10}$$

R — расстояние от рассматриваемой точки до диполя, Q — момент диполя, s — направление оси диполя.

5. Для нетеплопроводной жидкости решения остаются того же вида при рассмотрении радиации в диффузионном приближении, причем

$$g(\lambda)=a_1^2\lambda\lambda,\quad a_1^2=a^2+\frac{2}{3}\zeta\int\limits_{(\nu)}a_\nu\tau_{\nu 0}^{-1}d\nu,\tag{11}$$

и интегралы (4) выражаются через функцию ошибок. Закон сохранения энергии мгновенных источников выполняется.

Для чисто излучающей среды основное уравнение

$$\Lambda(u)=\Lambda_0(u)-\zeta\tau_1 u(x,t),\quad \tau_1=\int\limits_{(\nu)}a_\nu\tau_{\nu 0}d\nu,\tag{12}$$

подстановкой $w=u\exp(\zeta\tau_1 t)$ преобразуется в уравнение теплопроводности $\Lambda_0(w)=0$. При учете и без учета теплопроводности энергия не сохраняется.

6. Уравнение (1) является частным случаем уравнения

$$L(u)=L_0(u)+{}^1/_4\zeta R(u)=f(x,t)\tag{13}$$

обобщения параболического уравнения $L_0(u)=f(x,t)$, изучавшегося в работе ([6]). Для (13) и $L_0(u)=f$ можно поставить одни и те же основные задачи и доказать аналогичным путем большинство утверждений, известных ([6]) для уравнения $L_0=f$, с дополнительным требованием существования и непрерывности интегралов, входящих в $R(u)$. В частности, для (1) справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $u(x,t)$ 1) *непрерывна в* $\overline{H}$ *и ограничена снизу:* $u(x,t)>-m<0$, m — *константа,* 2) *имеет в* H *непрерывные производные, входящие в* $\Lambda_0(u)$, *непрерывен и существует оператор* $R(u)$, 3) $u(x,0)\geqslant 0$, 4) $\Lambda(u)\leqslant 0$ *в* H.

Тогда $u(x,t)\geqslant 0$ *в* $\overline{H}$.

Замечание. Теорема справедлива, если m заменить на $m(r^n+1)\exp(\beta r)$; m, n, $\beta<\tau_{\nu_0}\neq 0$ положительные константы.

Теорема 2. *Если непрерывная и ограниченная в* $\overline{H}$ *функция* $u(x,t)$ *удовлетворяет в* H *уравнению* (1), *причем* $|u(x,0)|\leqslant m$, m — *постоянная, то* $|u(x,t)|\leqslant m$ *всюду в* $\overline{H}$.

Отсюда следует единственность решения задачи Коши для уравнения (1) в классе ограниченных в $\overline{H}$ функций и непрерывная зависимость решения от начальной функции, а из замечания к теореме 1 — единственность решения в классе функций, растущих при $r \to \infty$ не быстрее $r^n \exp(\beta r)$, $\beta < \tau_{\nu_0} \neq 0$. Для (1), очевидно, не существует решений, растущих как $\exp(\beta r^2)$, $\beta > 0$.

Если (2) выполняется всюду, кроме точек некоторого множества $\mathscr{E}$ — в этих точках $\psi(x)$ может иметь разрывы, — то единственность решения устанавлцвается следующей теоремой.

Теорема 3. *Пусть множество $\mathscr{E}$ точек на плоскости $t = 0$, где не выполняется начальное условие, таково, что любое ограниченное подмножество $\mathscr{E}^* \subset \mathscr{E}$ при любом наперед заданном $\varepsilon > 0$ можно покрыть конечным числом N сфер радиусов ρ_k, $k = 1, 2, \ldots, N$, таких, что $\Sigma \rho_k^\lambda < \varepsilon$, $0 < \lambda < 3$. Пусть определенная, непрерывная и ограниченная в $\overline{H} \setminus \mathscr{E}$ функция $u(x, t)$ удовлетворяет в H уравнению (1), а на плоскости $t = 0$ вне множества $\mathscr{E}$ — начальному условию $u(x, 0) = 0$.*

Тогда $u(x, t) \equiv 0$ всюду в $\overline{H} \setminus \mathscr{E}$.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
8 XII 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. А. Прокофьев, ДАН, 194, № 6, 1290 (1970). [2] C. Truesdell, J. Rational Mech. and Anal., 2, № 4, 643 (1953). [3] И. Г. Петровский, Лекции об уравнениях с частными производными, М.—Л., 1950. [4] А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, Уравнения математической физики, изд. 2-е, М., 1953. [5] Л. Берс, Ф. Джон, М. Шехтер, Уравнения с частотными производными, М., 1966. [6] А. М. Ильин, А. С. Калашников, О. А. Олейник, УМН, 17, в. 3 (105), 3 (1962).