Доклады Академии наук СССР
1971. Том 199, № 5

УДК 539.3 ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Э. И. ЗВЕРОВИЧ

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПЛОСКОСТИ С РАЗРЕЗАМИ, РАСПОЛОЖЕННЫМИ НА ВЕЩЕСТВЕННОЙ ОСИ

(Представлено академиком П. Я. Кочиной 12 II 1971)

Зафиксируем вещественные числа r_k, $-\infty < r_1 < r_2 < \ldots < r_{2h+2} < +\infty$. Пусть упругая среда заполняет область D, полученную удалением из плоскости z прямолинейных отрезков $[r_{2k-1}, r_{2k}]$, $k = 1, 2, \ldots, h+1$.

Рис. 1

Напряжения и смещения в плоской задаче теории упругости для области D описываются однозначными аналитическими в D функциями $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$ (потенциалами Колосова — Мусхелишвили ([1, 2])):

$$\sigma_x + \sigma_y = 4\,\mathrm{Re}\,\Phi(z), \quad z = x + iy; \tag{1}$$

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = \Phi(z) + \Omega(\bar{z}) - (\bar{z} - z)\overline{\Phi'(z)}; \tag{2}$$

$$2\mu(\partial u/\partial x + i\,\partial v/\partial x) = \varkappa\Phi(z) - \Omega(\bar{z}) + (\bar{z} - z)\overline{\Phi'(z)}. \tag{3}$$

Здесь σ_x, σ_y, τ_{xy} — компоненты тензора напряжений, u и v — компоненты вектора смещений, μ и $\varkappa$ — постоянные. Функции $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$ при $z \to \infty$ имеют следующие разложения:

$$\Phi(z) = \frac{N_1 + N_2}{4} + i\frac{2\mu\varepsilon_\infty}{1+\varkappa} - \frac{X + iY}{2\pi(1+\varkappa)}\frac{1}{z} + \ldots; \tag{4}$$

$$\Omega(z) = \frac{N_1 + N_2}{4} - \frac{N_1 - N_2}{2}e^{2i\alpha} - i\frac{2\mu\varepsilon_\infty}{1+\varkappa} + \frac{\varkappa(X + iY)}{2\pi(1+\varkappa)}\frac{1}{z} + \ldots \tag{5}$$

Величины N_1, N_2, α, ε_∞, X, Y, $\varkappa$, μ будем считать заданными.

Каждую точку x, лежащую на интервалах (r_{2k-1}, r_{2k}), будем рассматривать как две различные граничные точки области D, считая точки x^+ и x^- лежащими на разных берегах разрезов. Введем замкнутые ориентированные кривые $a_1, a_2, \ldots, a_{h+1}$ (дважды проходимые разрезы) так, как указано на рис. 1. Обозначим $L = \bigcup_{\nu=1}^{h+1} a_\nu$.

Пусть на каждой кривой a_k зафиксировано $2n_k$ ($n_k \geqslant 0$) различных точек. Выбрасывая из L все зафиксированные точки, получим в остатке конечное число открытых связных компонент. Пусть на каждой из этих компонент задано краевое условие одного из следующих типов:

I тип. Заданы граничные значения компонент σ_y и τ_{xy} тензора напряжений.

II тип. Заданы граничные значения вектора смещений $u + iv$.

Требуется, чтобы на компонентах, которые имеют общую граничную точку (из числа выброшенных), были заданы краевые условия различных типов. На тех кривых a_k, для которых $n_k = 0$, на тип краевого условия ограничений не накладывается. Требуется найти в области D функции σ_x, σ_y, τ_{xy}, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ обеспечив однозначность функции $\mathbf{u} + i\mathbf{v}$.

Поставлена смешанная задача теории упругости, указанная в заголовке. В частных случаях эта задача была решена Д. И. Шерманом и Н. И. Мусхелишвили ([1], § 120, там же имеется библиография). В данной выше постановке смешанную задачу рассматривал впервые Г. П. Черепанов [2], но доказательства существования решения не дал, указал лишь алгоритм построения решения. В настоящей заметке анонсируется доказанный при естественных ограничениях следующий основной результат.

Смешанная задача теории упругости, поставленная выше, имеет единственное решение, которое можно построить конструктивно.

Входящие в (1) — (5) функции $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$ допускают особенности не выше интегрируемых порядков в окрестности всех точек r_k, а также в окрестности всех точек, где меняется тип краевого условия. Будем предполагать, что в остальных точках контура L функции $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$ имеют H-непрерывные граничные значения, причем

$$\lim_{y\to\pm 0} y\Phi'(x+iy) = 0. \tag{6}$$

В связи с этим будем считать ограниченными и H-непрерывными (в своих областях определения) заданные граничные значения σ_y и τ_{xy} компонент тензора напряжений, а также производные u', v' заданных компонент вектора смещений. Предлагаемый метод решения смешанной задачи основан на сведении ее к краевой задаче Римана на двулистной (гиперэллиптической) римановой поверхности $\mathfrak{R}$ рода h [3, 4], заданной алгебраическим уравнением

$$w^2 = f(z), \quad f(z) = \prod_{k=1}^{2h+2} (z - r_k). \tag{7}$$

Будем писать $(z, w) \in \mathfrak{R}$, имея в виду, что z и w связаны уравнением (7). В области D, изображенной на рис. 1, можно выделить две однозначные и непрерывные ветви корня $\sqrt{f(z)}$. Через $+\sqrt{f(z)}$ обозначим ту непрерывную ветвь корня, которая при $z\to\infty$ имеет разложение $+\sqrt{f(z)} = z^{h+1} + \ldots$. Множество всех точек $(z, +\sqrt{f(z)}) \in \mathfrak{R}$ назовем в е р х н и м л и с т о м D^+ поверхности $\mathfrak{R}$. Н и ж н и й л и с т D^- определяется аналогично: $(z, -\sqrt{f(z)}) \in \mathfrak{R}$. Замкнутые кривые a_k (рис. 1) в конформной структуре поверхности $\mathfrak{R}$ являются жордановыми и аналитическими. Введем теперь кусочно-аналитическую функцию $F(z, w)$ на $\mathfrak{R}$, полагая

$$F(z, w) = \begin{cases} \Phi(z) \text{ на верхнем листе } D^+ \text{ поверхности } \mathfrak{R}, \\ \Omega(z) \text{ на нижнем листе } D^- \text{ поверхности } \mathfrak{R}. \end{cases} \tag{8}$$

Тогда соотношения (2) и (3) можно переписать в виде

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = F(z, w) + F(\bar z, -\bar w) - (\bar z - z)\overline{[dF(z, w)/dz]}; \tag{9}$$

$$2\mu(\partial\mathbf{u}/\partial x + i\,\partial\mathbf{v}/\partial x) = \varkappa F(z, w) - F(\bar z, -\bar w) + (\bar z - z)\overline{[dF(z, w)/dz]}, \tag{10}$$

где в качестве w берется ветвь $w = +\sqrt{f(z)}$. При этом $(z, w) \in D^+$, а $(\bar z, -\bar w) \in D^-$. В силу закона склеивания листов поверхности $\mathfrak{R}$ точки (z, w) и $(\bar z, -\bar w)$ при $y\to\pm 0$ стремятся к одной и той же точке (x, v) контура L. Обозначим через L_1 совокупность всех компонент контура L, на которых заданы напряжения, а через L_2 — все компоненты, где заданы смещения. Переходя в одном из равенств (9), (10) к пределу при $y\to\pm 0$, $(z, w)\to(x, v) \in L_1 \cup L_2$, получим

$$F^+(x, v) = G(x, v)F^-(x, v) + g(x, v), \quad (x, v) \in L_1 \cup L_2, \tag{11}$$

где

$$G(x, v) = \begin{cases} -1, & (x, v) \in L_1, \\ 1/x, & (x, v) \in L_2, \end{cases}$$

$$g(x, v) = \begin{cases} \lim\limits_{y \to \pm 0} (\sigma_y - i\tau_{xy}), & (x, v) \in L_1, \\ \lim\limits_{y \to \pm 0} \dfrac{2\mu}{\varkappa}\left(\dfrac{\partial \mathrm{u}}{\partial x} + i\dfrac{\partial \mathrm{v}}{\partial x}\right), & (x, v) \in L_2. \end{cases} \qquad (12)$$

В (11) через $F^+(x, v)$ и $F^-(x, v)$ обозначены предельные значения функции (8) на L соответственно слева и справа (т. е. из D^+ и из D^-). Чтобы обеспечить интегрируемость функций $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$, будем допускать в качестве решений задачи (11) только те функции $F(z, w)$, которые кратны дивизору $\mathscr{J}^{-1}$, т. е. потребуем: $\mathscr{J}^{-1} | (F)$. Дивизор $\mathscr{J}$ определяется как произведение дивизоров $\mathscr{J}_1$ и $\mathscr{J}_2$, где $\mathscr{J}_1 = (r_1, 0)\cdot(r_2, 0)\cdot\ldots\cdot(r_{2h+2}, 0)$, а в дивизор $\mathscr{J}_2$ включаются с кратностью $+1$ все точки контура L, в которых происходит изменение типа краевого условия (точки разрыва функции $G(x, v)$). Таким образом, смешанная задача сведена к частному случаю краевой задачи Римана на гиперэллиптической римановой поверхности (7), и можно применить результаты работ ([3], [4]). Выделим ветвь функции $\ln G(x, v)$, полагая

$$\arg G(x, v) = \begin{cases} \pi, & (x, v) \in L_1, \\ 0, & (x, v) \in L_2. \end{cases} \qquad (13)$$

Пусть (x_k, v_k) — точка дивизора $\mathscr{J}_2$. По формулам работы ([3]) сопоставим этой точке число $\varkappa_k = +{}^1/_2$ или $\varkappa_k = -{}^1/_2$, смотря по тому, совпадает ли направление перехода от L_1 к L_2 в точке (x_k, v_k) с положительным направлением на L или противоположно ему. Построим вспомогательный дивизор $\mathscr{E}$:

$$\mathscr{E} = \prod_k (x_k, v_k)^{[\varkappa_k]}, \quad \operatorname{ord}\mathscr{E} = -\sum_{k=1}^{h+1} n_k. \qquad (14)$$

Далее,

$$\operatorname{ord}\mathscr{J} = \operatorname{ord}\mathscr{J}_1 + \operatorname{ord}\mathscr{J}_2 = 2h + 2 + \sum_{k=1}^{h+1} n_k.$$

В силу очевидного неравенства $\operatorname{ord}\mathscr{J} > 2h - 2$ в задаче (11) реализуется неособый случай ([3]), поэтому она безусловно разрешима, а ее общее решение содержит линейно $l = \sum\limits_{k=1}^{h+1} n_k + h + 3$ произвольных постоянных. Для определения этих постоянных необходимо выразить условия смешанной задачи, которые не были учтены при постановке краевой задачи (11). Из разложений (4), (5) при $z \to \infty$ получаем 4 уравнения. Остальные уравнения должны быть получены из условий, налагаемых на вектор смещений $\mathrm{u} + i\mathrm{v}$:

$$2\mu\,[\mathrm{u}(z) + i\mathrm{v}(z)] = \qquad (15)$$

$$= \varkappa \int\limits_{(z_0, w_0)}^{(z, w)} F(\tau, \zeta)\,d\tau - \int\limits_{(\bar z_0, -\bar w_0)}^{(\bar z, -\bar w)} F(\tau, -\zeta)\,d\tau + (\bar z - z)\overline{F(z, w)} + \mathrm{const},$$

где точки (z_0, w_0), (z, w), (τ, ζ) и путь интегрирования в первом интеграле целиком лежат на верхнем листе D^+ поверхности $\mathfrak{R}$. Путь интегрирования во втором интеграле целиком лежит в D^-, а при гомеоморфизме в область D пути интегрирования интегралов (15) располагаются симметрично относительно вещественной оси. Исходя из формулы (15), легко доказывается, что число уравнений, обеспечивающих однозначность вектора смещений (после того, как выполнены условия на бесконечности), равно $h-\lambda$, где λ — число тех кривых a_k, на которых всюду заданы смещения (в частности, соответствующие $n_k=0$). Число всех связных компонент контура L_2 (где заданы смещения) равно $\lambda+\sum_{k=1}^{h+1} n_k$. Требуя, чтобы на каждой компоненте контура L_2 смещения принимали заданные значения (а не только лишь с точностью до произвольной постоянной) и учитывая наличие в правой части (15) произвольной постоянной, не содержащейся в общем решении задачи (11), получим еще $\lambda+\sum_{k=1}^{h+1} n_k-1$ уравнений. Таким образом, общее число полученных уравнений равно

$$4+(h-\lambda)+\left(\lambda+\sum_{k=1}^{h+1} n_k-1\right)=\sum_{k=1}^{h+1} n_k+h+3=l,$$

что совпадает с числом постоянных, содержащихся в общем решении краевой задачи (11). Полученная система уравнений имеет единственное решение при любой правой части. В самом деле, соответствующая однородная система равносильна тому частному случаю смешанной задачи, когда на L_1 отсутствуют напряжения, на L_2 равны нулю смещения и, кроме того, $N_1=N_2=\varepsilon_\infty=X=Y=0$. В силу известной теоремы единственности ([1], § 40) такая смешанная задача имеет только тривиальное решение. Отсюда следует неразрешимость однородной системы, а это, в свою очередь, влечет однозначную разрешимость неоднородной системы уравнений. Таким образом, доказано, что поставленная выше смешанная задача имеет единственное решение при любых исходных данных.

Общее решение краевой задачи Римана на римановой поверхности построено в [3]. В работе [4] показано, что в гиперэллиптическом случае все объекты, через которые выражается общее решение, можно построить конструктивно в терминах комплексных переменных z и w, связанных уравнением (7). Отсюда следует возможность конструктивного построения решения рассмотренной смешанной задачи. При этом в понятие конструктивного решения мы включаем выполнение конечного числа квадратур, а также указанный в [4] алгоритм построения частного решения проблемы обращения Якоби. Отметим что необходимость решать проблему обращения Якоби при построении решения смешанной задачи не зависит от применяемого метода, а является новым качеством, возникающим за счет многосвязности области D.

Одесский инженерно-строительный
институт

Поступило
1 II 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. И. Мусхелишвили, Некоторые основные задачи математической теории упругости, «Наука», 1966. [2] Г. П. Черепанов, ПММ, 26, № 5 (1962). [3] Э. И. Зверович, ДАН, 198, № 1 (1971). [4] Э. И. Зверович, 199, № 4 (1961).