Доклады Академии наук СССР
1971. Том 199, № 5

УДК 518.9

МАТЕМАТИКА

Т. Е. КУЛАКОВСКАЯ

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ СОВПАДЕНИЯ ЯДРА И РЕШЕНИЯ В КЛАССИЧЕСКОЙ КООПЕРАТИВНОЙ ИГРЕ

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 12 II 1971)

1. В классической кооперативной теории игр, созданной Нейманом и Моргенштерном, существует два принципа оптимальности. Одному из них соответствует понятие ядра игры, а другому — решения игры. (В общей кооперативной теории они обозначаются соответственно через C-ядро и $N-M$-решение.) Вопрос о совпадении ядра и решения изучался давно, так как ядро является более простым, по сравнению с решением, образованием и имеет естественную экономическую интерпретацию. Джиллис в [2] ввел на множестве дележей отношение предпочтения, названное мажорированием, и доказал, что ядро является решением тогда и только тогда, когда любой дележ, не принадлежащий ядру, мажорируем. Однако этот результат может играть лишь вспомогательную роль, так как условия теоремы не выражаются через характеристическую функцию а, стало быть, не проверяемы.

О. Н. Бондаревой в [1] получены необходимые и достаточные условия существования ядра, там же получены некоторые достаточные условия того, чтобы ядро совпадало с решением. Наиболее общие из известных достаточных условий совпадения ядра и решения получены автором в [3]. В данной заметке с помощью методов, используемых в [1], и введения отношения сильного мажорирования получены необходимые и достаточные условия совпадения ядра и решения, проверка которых сводится к решению нескольких задач линейного программирования.

2. Как принято, будем обозначать через $I=\{1,\ldots,n\}$ множество игроков, $A=\left\{x\in E_n\,\middle|\,\sum_{i=1}^{n}x_i=1;\ 0\leqslant x_i\leqslant 1,\ i=1,\ldots,n\right\}$ — симплекс дележей, C — ядро игры, V — решение игры. (Подробнее определения классической кооперативной теории можно найти, например, в [1, 4].)

Для любого k и любого набора коалиций $\{S_1,\ldots,S_k\}$ рассмотрим множество

$$U_k(\{S_1,\ldots,S_k\})=$$
$$=\left\{x\in A\,\middle|\,\sum_{j\in S_i}x_j<v(S_i),\ 1\leqslant i\leqslant k;\quad \sum_{j\in T}x_j\geqslant v(T),\ T\neq S_i,\ 1\leqslant i\leqslant k\right\}.$$

Легко видеть, что в $U_k(\{S_1,\ldots,S_k\})$ доминирование может осуществляться только по коалициям $S_1,\ldots,S_k$. Везде далее будем обозначать $\sum_{i\in S}x_i$ через $x(S)$.

Введем на множестве дележей A новое транзитивное отношение. Будем говорить, что дележ y **сильно мажорирует** дележ x ($y\rightrightarrows x$) если существует такая коалиция S, что

$$\begin{aligned}&y_i>x_i \text{ для всех } i\in S,\\ &y(T)\geqslant v(T) \text{ для всех таких } T, \text{ что } T\not\subseteq S,\\ &y(S)\leqslant v(S).\end{aligned}\tag{1}$$

Дележ x сильно мажорируем, если существует $y \rightrightarrows x$. Коалицию S, для которой разрешима система неравенств

$$\begin{aligned}&y(S) \leqslant v(S),\\&y(T) \geqslant v(T) \text{ для всех таких } T, \text{ что } T \not\subseteq S,\end{aligned}$$

назовем сильной коалицией.

Легко доказать следующую теорему.

Теорема 1. *Для того чтобы ядро игры существовало и совпадало с решением, необходимо и достаточно, чтобы любой дележ, не принадлежащий ядру, был сильно мажорируем.*

3. Для множества игроков I рассмотрим такой набор коалиций $\mathfrak{A} = \{S_1, \ldots, S_k\}$ и набор положительных чисел $\Lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$, что

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \chi_{S_i}(j) = \chi_I(j) \text{ для всех } j \in I.$$

Такие пары $(\mathfrak{A}, \Lambda)$ были введены независимо в ([1]) под названием $(q-\theta)$-покрытий и в ([6]) под названием уравновешенного множества коалиций. Для краткости будем в дальнейшем называть пару $(\mathfrak{A}, \Lambda)$ покрытием.

Покрытие $(\mathfrak{A}, \Lambda)$ назовем связанным с коалицией S, если существует такое $S_i \in \mathfrak{A}$, что $S_i \subseteq S$. Тогда $(\mathfrak{A}, \Lambda)$ можно представить в виде

$$\mathfrak{A} = \{\bar{S}_1, \ldots, \bar{S}_k;\ T_1, \ldots, T_m\},$$

где $\bar{S}_i \subseteq S$, $i = 1, \ldots, k$; $T_i \not\subseteq S$, $i = 1, \ldots, m$,

$$\Lambda = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k;\ \beta_1, \ldots, \beta_m\}.$$

Лемма. *Для того чтобы дележ x был сильно мажорируем, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая сильная коалиция S, что для любого покрытия $(\mathfrak{A}, \Lambda)$, связанного с S,*

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x(\bar{S}_i) < v'(I) - \sum_{i=1}^{m} \beta_i v'(T_i), \tag{2}$$

где $v'(T) = v(T)$, если $T \neq I \setminus S$; $v'(I \setminus S) = v(I) - v(S)$.

Доказательство леммы основано на применении к ([1]) теоремы Фань-Цзи о разрешимости системы неравенств для линейных функционалов.

Пусть $\{S_1, \ldots, S_k\}$ — набор коалиций. Каждой S_i поставим в соответствие связанное с ней покрытие $(\mathfrak{A}_i, \Lambda_i)$, где

$$\mathfrak{A}_i = \{\bar{S}_1^{(i)}, \ldots, \bar{S}_{l_i}^{(i)};\ T_1^{(i)}, \ldots, T_{m_i}^{(i)}\},$$
$$\Lambda_i = \{\lambda_1^{(i)}, \ldots, \lambda_{l_i}^{(i)};\ \beta_1^{(i)}, \ldots, \beta_{m_i}^{(i)}\}.$$

Будем говорить, что покрытие $(\mathfrak{A}, \Lambda)$ порождено системой покрытий $\{(\mathfrak{A}_i, \Lambda_i)\}$, если оно имеет вид

$$\mathfrak{A} = \{T_1, \ldots, T_m;\ \bar{S}_1^{(1)}, \ldots, \bar{S}_{l_1}^{(1)};\ \ldots;\ \bar{S}_1^{(k)}, \ldots, \bar{S}_{l_k}^{(k)}\},$$
$$\Lambda = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m;\ c_1\lambda_1^{(1)}, \ldots, c_1\lambda_{l_1}^{(1)};\ \ldots, c_k\lambda_1^{(k)}, \ldots;\ c_k\lambda_{l_k}^{(k)}\},$$

где $T_i \not\subseteq S_j$ для $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, k$.

Введем следующие обозначения:

$$\begin{cases} v^{(i)}(T) = v(T), \text{ если } T \neq I \setminus S_i;\\ v^{(i)}(I \setminus S_i) = v(I) - v(S_i);\end{cases} \quad \begin{cases} \bar{v}(T) = v(T), \text{ если } T \neq I \setminus S_i,\ i = 1, \ldots, k,\\ \bar{v}(I \setminus S_i) = v(I) - v(S_i),\quad i = 1, \ldots, k,\end{cases}$$

Применяя лемму и результаты Фань-Цзи, можно доказать следующую теорему.

Теорема 2. *Для того чтобы в игре* Γ *существовало решение, совпадающее с ядром, необходимо и достаточно, чтобы для любого набора коалиций* $\{S_1, \ldots, S_k\}$, *для которого* $U_k(\{S_1, \ldots, S_k\}) \neq \phi$, *были выполнены следующие условия*:

1) *набор* $\{S_1, \ldots, S_k\}$ *содержит хотя бы одну сильную коалицию (не умаляя общности, пусть* $\{S_1, \ldots, S_p\}$ — *множество сильных коалиций*);

2) *для любой системы покрытий* $\{(\mathfrak{A}_i, \Lambda_i)\}_{i=1}^{p}$, *связанных соответственно с сильными коалициями* $S_1, \ldots, S_p$, *существует порожденное ею покрытие* $(\mathfrak{A}, \Lambda)$, *для которого имеет место одно из двух*:

а) $I \setminus S_i \notin \mathfrak{A}$, $i = 1, \ldots, k$,

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \bar{v}(T_i) + \sum_{i=1}^{p} c_i \left[v(I) - \sum_{j=1}^{m_i} \beta_j^{(i)} v^{(i)} (T_j^{(i)}) \right] > v(I),$$

б) *существует* i, $1 \leqslant i \leqslant k$, *для которого* $I \setminus S_i \in \mathfrak{A}$, *и*

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \bar{v}(T_i) + \sum_{i=1}^{p} c_i \left[v(I) - \sum_{j=1}^{m_i} \beta_j^{(i)} v^{(i)} (T_j^{(i)}) \right] \geqslant v(I).$$

Следствие. *Для того чтобы в игре* Γ *существовало решение, совпадающее с ядром, достаточно, чтобы в любом наборе* $\{S_1, \ldots, S_k\}$, *для которого* $U_k(\{S_1, \ldots, S_k\}) \neq \phi$, *существовала такая сильная коалиция* S_{i_0}, *что*

1) $S_{i_0} \not\supset S_j$, $1 \leqslant j \leqslant k$.

2) *для любого покрытия* $(\mathfrak{A}, \Lambda)$, *связанного с* S_{i_0},

$$\sum_{i=1}^{m} \beta_i v^{(i_0)} (T_i) + v(S_{i_0}) - \sum_{i=1}^{m} \beta_i v(T \cap S_{i_0}) \leqslant v(I).$$

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
20 I 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] О. Н. Бондарева, Проблемы кибернетики, № 10 (1963). [2] D. B. Gillies, Solutions to General Non-zero-sum Games. Contributions IV, Ann. Math. Studies 40, Princeton, 1959. [3] Т. Е. Кулаковская, Литовск. матем. сборн., 9, № 2 (1969). [4] Д. фон Нейман, О. Моргенштерн, Теория игр и экономическое поведение, 1970. [5] Фань-Цзи, Сборн. Линейные неравенства и смежные вопросы, М., 1959. [6] L. S. Shapley, Naval Res. Logist. Quart., 14, № 4, 453 (1967).