Доклады Академии наук СССР
1971. Том 199, № 5

УДК 517.53 *МАТЕМАТИКА*

С. Ф. ПРОКОПЦЕВ

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ЛИНЕЙНЫХ КОМБИНАЦИЙ ФУНКЦИЙ, БЛИЗКИХ К ПОКАЗАТЕЛЬНЫМ

(Представлено академиком В. С. Владимировым 15 II 1971)

В этой работе мы будем рассматривать вопросы, аналогичные тем, которые изучались в [1]. Более точно, будем рассматривать систему функций

$$f_\nu(z) = e^{\lambda_\nu z}[1 + \psi_\nu(z)] \qquad (\nu = 1, 2, \ldots) \tag{1}$$

при следующих условиях:

1) λ_ν — положительные простые корни целой функции экспоненциального типа вида

$$L(\lambda) = \int\limits_{I_0} e^{\lambda t}\, d\sigma(t) \tag{2}$$

(предполагаем, что у $L(\lambda)$ при $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$ нет корней, отличных от λ_ν), где $\sigma(t)$ — функция с ограниченной вариацией на вертикальном отрезке I_0 длины $2a$ с серединой в начале (будем полагать, что вблизи концов I_0 функция $\sigma(t)$ не является постоянной);

2) конечна величина

$$\delta = \overline{\lim_{\nu\to\infty}} \frac{1}{\lambda_\nu} \ln\left|\frac{1}{L'(\lambda_\nu)}\right|; \tag{3}$$

3) функции $\psi_\nu(z)$ регулярны в некоторой замкнутой области $\bar{F}$, примыкающей к I_0 слева (I_0 является частью границы $\bar{F}$), причем на $\bar{F}$

$$|\psi_\nu(z)| \leqslant Aq^{\lambda_\nu}, \qquad 0 \leqslant q < e^{-\delta} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots); \tag{4}$$

4) выполняется свойство единственности: если в какой-либо области $\bar{D} \subset \bar{F}$ будет $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} b_\nu f_\nu(z) = 0$, то все $b_\nu = 0$.

Лемма 1. *Возьмем фиксированную точку α, $\alpha > \delta$. Какова бы ни была последовательность комплексных чисел $\{\varepsilon_n\}$, $|\varepsilon_n| \leqslant e^{-\alpha\lambda_n}$, функция*

$$\omega(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{L'(\lambda_n)} L_n(\lambda), \quad L_n(\lambda) = \frac{L(\lambda)}{\lambda - \lambda_n} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

обладает свойствами $\omega(\lambda_n) = \varepsilon_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и $\omega(\lambda) = \int\limits_{I_0} e^{\lambda t} d\sigma^*(t)$, где $\sigma^*(t)$ — функция с ограниченной вариацией на I_0. При этом полная вариация функции $\sigma^*(t)$ на I_0 не превосходит постоянной $B(\alpha)$, одной и той же для всех последовательностей $\{\varepsilon_n\}$, $|\varepsilon_n| \leqslant e^{-\alpha\lambda_n}$.

Лемма 2. *Пусть*

$$\delta < \alpha < \ln(1/q) \qquad (qe^\alpha = q_1 < 1). \tag{5}$$

Существуют постоянные N и K, не зависящие от коэффициентов a_ν, но зависящие от α, такие, что

$$\sum_{\nu=N+1}^{p} |a_\nu e^{\lambda_\nu z}| \leqslant K \max_{t\in I_0} \left|\sum_{\nu=1}^{p} a_\nu f_\nu(t)\right|, \quad \operatorname{Re}(z) \leqslant -\alpha < 0. \tag{6}$$

Лемма 3. *Пусть N — число, фигурирующее в лемме 2. Существует постоянная $\tilde{K}$, не зависящая от коэффициентов a_ν и такая, что*

$$\sum_{\nu=1}^{N} \left| a_\nu e^{\lambda_\nu z} \right| \leqslant \tilde{K} \max_{t \in I_0} \left| \sum_{\nu=1}^{p} a_\nu f_\nu(t) \right|, \quad z \in I_0. \tag{7}$$

Докажем лемму 3. Сначала убедимся, что существует постоянная $\bar{K}$, не зависящая от коэффициентов a_ν и такая, что

$$\left| \sum_{\nu=1}^{N} a_\nu f_\nu(z) \right| \leqslant \bar{K} \max_{t \in I_0} \left| \sum_{\nu=1}^{p} a_\nu f_\nu(t) \right|, \quad z \in I_0. \tag{8}$$

Допустим, что такой постоянной $\bar{K}$ нет, тогда из этого следует, что существуют такие линейные агрегаты

$$P_n(z) = \sum_{\nu=1}^{p_n} a_{n\nu} f_\nu(z) \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

для которых

$$\max_{t \in I_0} \left| \sum_{\nu=1}^{N} a_{n\nu} f_\nu(z) \right| = K_n \max_{t \in I_0} | P_n(t) |, \quad K_n \uparrow \infty.$$

Без ограничения общности можно считать, что

$$\max_{t \in I_0} | P_n(t) | = 1. \tag{9}$$

Введем обозначения:

$$P_n'(z) = \sum_{\nu=1}^{N} a_{n\nu} f_\nu(z), \quad P_n''(z) = \sum_{\nu=N+1}^{p_n} a_{n\nu} f_\nu(z).$$

Тогда, в силу (9), будет

$$\max_{z \in I_0} | P'(z) | = K_n \uparrow \infty, \quad \max_{z \in I_0} | P_n''(z) | = M_n, \quad M_n \to \infty. \tag{10}$$

Обозначая затем

$$P_n'(z)/M_n = q_n(z), \quad P_n''(z)/M_n = q_n''(z), \quad P_n(z)/M_n = q_n(z),$$

будем иметь $q_n'(z) + q_n''(z) = q_n(z)$. В силу свойства единственности, функции $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_N(z)$ линейно независимы на I_0. Поэтому внутри I_0 найдутся такие точки $z_1, z_2, \ldots, z_N$, что $\operatorname{Det}\|f_i(z_k)\| = \Delta \neq 0$, $i, k = 1, 2, \ldots, N$. Далее, следуя, схеме доказательства леммы 2 из ([1]), получаем, что хотя бы в одной точке $z_\nu \in I_0$ выполняется условие

$$| q_n''(z_\nu) | > \mu > 0, \quad n \geqslant 1. \tag{11}$$

Так как $q_n(z) \to 0$ при $n \to \infty$ в силу (9) и $|q_n''(z)| \leqslant 1$ в силу (10), то функции $q_n'(z)$ ограничены на I_0. Положим $a_{n\nu} M_n^{-1} = b_{n\nu}$ и рассмотрим систему равенств $\sum_{i=1}^{N} b_{ni} f_i(z_k) = q_n'(z_k)$, $k = 1, 2, \ldots, N$. Из этой системы $b_{n1}, \ldots, b_{nN}$ можно представить в виде дробей, знаменатели которых постоянны и равны $\Delta \neq 0$, а числители ограничены на I_0. Итак, $|b_{n\nu}| \leqslant C$, $n \geqslant 1$, $\nu = 1, 2, \ldots, N$. Согласно лемме 2, имеем

$$\sum_{\nu=1}^{p_n} | b_{n\nu} | e^{-a\lambda_\nu} \leqslant C \sum_{\nu=1}^{N} e^{-a\lambda_\nu} + K = C_1, \quad n \geqslant 1. \tag{12}$$

Ввиду (4), (5), (12) имеем в любой примыкающей к I_0 слева ограниченной области $\overline{G} \subset \overline{F}$ (I_0 служит правой границей $\overline{G}$)

$$\left|\sum_{\nu=1}^{p_n} b_{n\nu} e^{\lambda_\nu z} \psi_\nu(z)\right| \leqslant \sum_{\nu=1}^{p_n} |b_{n\nu}| e^{-2\lambda_\nu} \leqslant AC_1 = C_2, \quad n \geqslant 1, \quad z \in \overline{G}. \qquad (13)$$

Далее, исходя из (1) и учитывая предыдущие оценки, имеем

$$\left|\sum_{\nu=1}^{p_n} b_{n\nu} e^{\lambda_\nu z}\right| < |q_n(z)| + C_2 \leqslant C_3, \quad n \geqslant 1, \quad z \in I_0.$$

В силу последней оценки и в силу свойств полиномов Дирихле (см. [2], стр. 315), получим

$$\left|\sum_{\nu=1}^{p_n} b_{n\nu} e^{\lambda_\nu z}\right| < C_4, \quad n \geqslant 1, \quad z \in \overline{R}, \qquad (14)$$

где $\overline{R}$ — область, ограниченная отрезком $[c, d] \in I_0$, $-a < \operatorname{Im}(c) < \operatorname{Im}(d) < a$, и лучами $\arg(z-c) = -\gamma$, $\arg(z-d) = \gamma$, $\pi/2 < \gamma < \pi$ (точки c и d могут быть взяты как угодно близкими от концов I_0). Тогда из неравенств (13) и (14) получаем

$$\left|\sum_{\nu=1}^{p_n} b_{n\nu} f_\nu(z)\right| = |q_n(z)| < C_2 + C_4 = C_5, \quad n \geqslant 1, \quad z \in \overline{G}^* = \overline{G} \cap \overline{R}. \qquad (15)$$

Но в силу (9) $|q_n(z)| \leqslant A_n$, $A_n \to 0$ при $n \to \infty$, $z \in [c, d]$. Тогда, учитывая последнюю оценку и оценку (15), по теореме о двух константах (см. [3], стр. 332, 333), на каждом замкнутом множестве $\overline{B} \subset G^*$ будет $|q_n(z)| \leqslant C_5^{\mu_1} A_n^{\mu_2}$ ($A_n \to 0$, $n \to \infty$), где μ_1 и μ_2 — положительные константы, $\mu_1 + \mu_2 = 1$. Таким образом, $q_n(z) \to 0$ при $n \to \infty$ для всех $z \in \overline{B}$. Тогда из результатов работы ([4]), стр. 330, следует, что существуют пределы $\lim\limits_{n\to\infty} b_{n\nu} = b_\nu$ и сходится абсолютно ряд

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu f_\nu(z) = P^*(z) \equiv 0, \quad \operatorname{Re}(z) < -\alpha < 0, \quad z \in G^*.$$

Отсюда, на основании свойства единственности, все $b_\nu = 0$ и, следовательно, $q_n(z) \to 0$ при $n \to \infty$, $z \in I_0$. Но ранее было показано, что $q_n(z) \to 0$ при $n \to \infty$, $z \in I_0$, поэтому и $q_n''(z) \to 0$ при $n \to \infty$, $z \in I_0$. Мы получили противоречие условию (11), что и доказывает неравенство (8). Теперь, исходя из (8), нетрудно получить искомое неравенство (7).

Теорема 1. *Существует постоянная K_1, не зависящая от коэффициентов a_ν и такая, что*

$$\sum_{\nu=1}^{p} |a_\nu e^{\lambda_\nu z}| \leqslant K_1 \max_{t \in I_0} \left|\sum_{\nu=1}^{p} a_\nu f_\nu(t)\right|, \quad \operatorname{Re}(z) \leqslant -\alpha < 0.$$

Теорема 2. *Существует постоянная K_2, не зависящая от коэффициентов a_ν и такая, что*

$$\left|\sum_{\nu=1}^{p} a_\nu f_\nu(z)\right| \leqslant K_2 \max_{t \in I_0} \left|\sum_{\nu=1}^{p} a_\nu f_\nu(t)\right|, \quad z \in \overline{H} = \overline{F} \cap \overline{R},$$

где $\overline{R}$ — область, фигурирующая при доказательстве леммы 3.

Из теорем 1 и 2 вытекает ряд следствий.

Полученные результаты иллюстрируются применительно к полиномам Фабера. Пусть K — ограниченный континуум, содержащий более одной точки, и G_∞ — та из смежных с ним областей, которой принадлежит точка $z = \infty$; $w = \Phi(z)$ — функция, конформно отображающая G_∞ на внешность круга Γ радиуса ρ с центром в точке $w = 0$; $\Phi_n(z)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, — многочлены Фабера, порожденные континуумом K.

Пусть λ_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$, целые положительные числа, причем

$$\lim_{\nu\to\infty}(\nu/\lambda_\nu) = a/\pi < 1 \quad (a > 0).$$

Положим $L(\lambda) = \prod_{\nu=1}^{\infty}(1 - \lambda^2/\lambda_\nu^2)$. Поскольку $\lambda_{\nu+1} > \lambda_\nu \geqslant m > 0$ $(m \geqslant 1)$, индекс конденсации $\delta = 0$. Предположим, что $L(\lambda) = O[(1 + |\lambda|)^{-\mu}]$, $|\lambda| < \infty$, $\mu > 1$. Тогда можно показать, что $L(\lambda)$ является функцией вида (2). Понимая под λ_ν только что указанные числа, сформулируем следующую теорему. Возьмем линию уровня C_R (прообраз окружности $|w| = R$ при отображении $w = \Phi(z)$), $R > \rho$, и на ней дугу l_0 — прообраз дуги l_0' окружности $|w| = R$ раствора $2a$. Обозначим через $\overline{\Pi}$ односвязную замкнутую область, ограниченную дугой $l_1 \subset l_0$ (концы l_1 не совпадают с концами l_0), дугой l_2 линии уровня C_{R_1}, $\rho < R_1 < R$, и кривыми l_3 и l_4, прообразами прямолинейных отрезков l_3' и l_4': $\arg w = \mathrm{const}$, $R_1 \leqslant |w| \leqslant R$.

Теорема 3. *При указанных условиях имеет место неравенство*

$$\left|\sum_{\nu=1}^{p} a_\nu \Phi_{\lambda_\nu}(z)\right| \leqslant \Lambda \max_{t\in l_0}\left|\sum_{\nu=1}^{p} \Phi_{\lambda_\nu}(t)\right|, \quad z \in \overline{\Pi},$$

где Λ — постоянная, не зависящая от коэффициентов a_ν.

Следствие. *Пусть в условии теоремы 3 последовательность*

$$\sum_{\nu=1}^{p_n} a_{n_\nu}\Phi_{\lambda_\nu}(z) \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

равномерно сходится на l_0, тогда она равномерно сходится в любой области вида $\overline{\Pi}$.

В заключение выражаю глубокую благодарность проф. А. Ф. Леонтьеву, под руководством которого выполнена эта работа.

Московский энергетический институт

Поступило 8 II 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Ф. Леонтьев, Сибирск. матем. журн., 6, № 2, 364 (1965). [2] А. Ф. Леонтьев, Изв. АН СССР, сер. матем., 29, № 2, 269 (1965). [3] Г. М. Голузин, Геометрическая теория функций комплексного переменного, М., 1966. [4] В. И. Ильин, Сибирск. матем. журн., 9, № 2, 315 (1968).