

В. БРЮНС (ГДР)

ОБОБЩЕННАЯ ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО
ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

(Представлено академиком В. И. Смирновым 28 XII 1970)

Рассмотрим линейную дифференциальную операцию n -го порядка

$$L[y] = y^{(n)}(x) + p_1(x)y^{(n-2)}(x) + \dots + p_n(x)y(x) \quad (0 \leq x \leq 1) \quad (1)$$

с коэффициентами $p_v \in L(0, 1)$, вообще говоря, комплексными. Обобщенная граничная задача определяется «размазанными» граничными условиями вида

$$U_v[y] \equiv \sum_{\mu=0}^{n-2} \alpha_v^{(\mu)} y^{(\mu)}(0) + \int_0^1 y^{(n-1)}(x) d\sigma_v(x) = 0 \quad (v = 1, 2, \dots, n). \quad (2)$$

В настоящей заметке мы исследуем систему собственных и присоединенных функций (с. и п.ф.) оператора L в пространстве $C^{n-1}[0, 1]$, порождаемого операцией (1) при условиях (2). Первая работа в этом направлении принадлежит Я. Д. Тамаркину⁽¹⁾, который рассмотрел случай, когда граничные условия, регулярные в смысле Биркгофа^(2,3) (стр. 66, 67), возмущены интегро-дифференциальными членами низшего порядка. Библиография последующих работ имеется в⁽⁴⁾, стр. 351–352.

В работе Ю. И. Любича⁽⁵⁾ методами теории целых функций был исследован случай $n = 1$. При этом выяснилось, что полнота (а в случае неполноты — величина дефекта) системы с. и п.ф. существенно зависит от скорости стремления $\sigma(x)$ к значениям на концах.

Сформулируем соответствующий результат, полученный нами для $n > 1$.

Сначала обобщим понятие регулярных граничных условий. Наряду с (2) воспользуемся «двойственными» представлениями функционалов U_v :

$$U_v[y] = \sum_{\mu=0}^{n-2} \beta_v^{(\mu)} y^{(\mu)}(1) + \int_0^1 y^{(n-1)}(x) d\tau_v(x) \quad (v = 1, 2, \dots, n). \quad (2^*)$$

Пусть для функционала U_v существует такое $p_v \geq 0$ (не обязательно целое), что пределы

$$\alpha_v = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tau_v(h) - \tau_v(0)}{h^{p_v}}, \quad \beta_v = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sigma_v(1) - \sigma_v(1-h)}{h^{p_v}} \quad (3)$$

существуют и хотя бы один из них отличен от нуля. Тогда число $k_v = n - p_v - 1$ назовем порядком функционала U_v . Заметим, что определение чисел p_v, α_v, β_v зависит только от коэффициентов $\alpha_v^{(\mu)}$ в (2) и поведения функций $\sigma_v(x)$ на концах сегмента $[0, 1]$.

Пусть n нечетно, $n = 2\mu - 1$. Положим ($j = -1, 0$)

$$\varphi_{2r}^{(j)} = -\varphi_{2r+1}^{(j)} = (-1)^j \frac{2r\pi}{n} \quad (r = 0, 1, \dots, \mu - 1)$$

и

$$\psi_m^{(j)} = (-1)^{m+j} \pi + \varphi_m^{(j)} \quad (m = 1, 2, \dots, n).$$

Краевые условия $\{U_v\}_{v=1}^n$ будем называть k -регулярными ($k = 0, 1, \dots, n-1$), если

- 1) U_v обладает порядком $k_v > k - n$ ($v = 1, 2, \dots, n$);
- 2) отличны от нуля числа $\theta_0^{(j)}, \theta_1^{(j)}$, определенные равенством ($j = -1, 0$)

$$\theta_0^{(j)} + \theta_1^{(j)} s = \det (\gamma_{l,m})_{l,m=1}^n, \quad (4)$$

где

$$\gamma_{l,m} = \begin{cases} \alpha_l \exp(i\varphi_m^{(j)} k_l) & (1 \leq m \leq \mu - 1), \\ \alpha_l \exp(i\varphi_m^{(j)} k_l) + s\beta_l \exp(i\psi_m^{(j)} k_l) & (m = \mu), \\ \beta_l \exp(i\psi_m^{(j)} k_l) & (\mu + 1 \leq m \leq n). \end{cases}$$

Аналогично вводится понятие k -регулярности для четного n , $n = 2\mu$. Именно в этом случае нужно положить

$$\varphi_{2r+1}^{(j)} = -\varphi_{2r}^{(j)} = (-1)^j 2r\pi/n \quad (r = 0, 1, \dots, \mu)$$

и

$$\psi_m^{(j)} = (-1)^{m+j+1} \pi + \varphi_m^{(j)} \quad (m = 1, 2, \dots, n).$$

Требование 1) сохраняется в неизменном виде, а 2) заменяется требованием, чтобы были отличны от нуля числа $\theta_{-1}^{(j)}, \theta_1^{(j)}$, определенные равенством ($j = -1, 0$)

$$\theta_{-1}^{(j)} s^{-1} + \theta_0^{(j)} + \theta_1^{(j)} s = \det (\gamma_{l,m})_{l,m=1}^n, \quad (5)$$

где

$$\gamma_{l,m} = \begin{cases} \alpha_l \exp(i\varphi_m^{(j)} k_l) & (1 \leq m \leq \mu - 1), \\ \alpha_l \exp(i\varphi_m^{(j)} k_l) + s\beta_l \exp(i\psi_m^{(j)} k_l) & (m = \mu), \\ \alpha_l \exp(i\varphi_m^{(j)} k_l) + s^{-1} \beta_l \exp(i\psi_m^{(j)} k_l) & (m = \mu + 1), \\ \beta_l \exp(i\psi_m^{(j)} k_l) & (\mu + 2 \leq m \leq n). \end{cases}$$

Теорема 1. Система собственных и присоединенных функций оператора L , порождаемого дифференциальной операцией (1) и k -регулярными обобщенными краевыми условиями, полна в его области определения в смысле C^k -метрики.

Наметим идею доказательства теоремы. Образует характеристический детерминант $\Delta(\lambda)$ граничной задачи $Ly = \lambda y$:

$$\Delta(\lambda) = \det (U_v[y_\mu(x, \lambda)]),$$

где $\{y_\mu(x, \lambda)\}_{\mu=1}^n$ — фундаментальная система решений уравнения $l[y] = \lambda y$, отвечающая единичной матрице начальных условий.

Если функционал V в пространстве C^k аннулирует все с. и п.ф. оператора L , то частные

$$Q_j(\lambda) = \Delta_j(\lambda) / \Delta(\lambda) \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (6)$$

являются целыми функциями от λ . Здесь $\Delta_j(\lambda)$ получается из $\Delta(\lambda)$ заменой j -й строки вектором $\{V[y_\mu(x, \lambda)]\}_{\mu=1}^n$. Задача сводится к доказательству того, что $Q_j(\lambda)$ — константы. Это удастся сделать, используя, во-первых, известную асимптотику решений уравнения $l[y] + \rho^2 y = 0$ (1), стр. 58, 59) и, во-вторых, оценку снизу для преобразования Лапласа $U_v[e^{iz}]$ на некоторых лучах, вытекающую из условий (3).

Следствие. При возмущении классических регулярных условий функционалами вида

$$\sum_{i=0}^{n-1} \int_a^b y^{(i)}(x) d\alpha_i(x),$$

где $0 < \alpha < \beta < 1$, система с. и п.ф. остается полной в области определения оператора в смысле C^{n-1} -метрики. В частности, полнота имеет место в многоточечных граничных задачах, для которых условия, получаемые вычеркиванием членов, относящихся к внутренним точкам, регулярны.

При отказе от ограничений $k_v > k - n$ система с. и п.ф., вообще говоря, перестает быть полной, как показывает соответствующий пример. В общем случае использованный нами метод дает оценку дефекта системы * с. и п.ф. в пространстве C^k .

Теорема 2. Если система граничных условий такова, что числа $\theta_0^{(j)}, \theta_1^{(j)}$ ($j = -1, 0$), определенные равенствами (4), или соответственно $\theta_{-1}^{(j)}, \theta_1^{(j)}$ ($j = -1, 0$) из (5) отличны от нуля, то дефект системы с. и п.ф. оператора L в пространстве C^k не превышает числа **

$$\sum_{v=1}^n \left(\left[\frac{k - k_v}{n} \right] + 1 \right).$$

Рассмотрим теперь вопрос о разложении в ряд по с. и п.ф. оператора L . Пусть

$$U_v[y] = V_v[y] + \int_0^1 y^{(l_v)}(x) d\sigma_v(x) \quad (0 \leq l_v \leq n-1), \quad (7)$$

где $V_v[y]$ является линейной комбинацией значений $y(x)$ и ее производных до порядка $l_v - 1$ включительно в точках $x_1, x_2, \dots, x_N$ ($0 = x_1 < x_2 < \dots < x_N = 1$) и

$$\sigma_v(x) = \sum_{\mu=1}^N \{ a_v^{(\mu)} |x_\mu - x|^{p_v} \operatorname{sgn}(x_\mu - x) \} + a_v(x), \quad (8)$$

где $0 \leq p_v < 1$, $|a_v^{(1)}| + |a_v^{(N)}| \neq 0$ и производная порядка p_v (в смысле Римана — Липувиля) от $a_v(x)$ абсолютно непрерывна. При $p_v = 0$ условимся понимать (8) в смысле

$$\sigma_v(x) = f_{1,v}(x) - f_{2,v}(1-x) + a_v(x),$$

где $f_{1,v}(x) = \sum_{x_\mu < x} a_v^{(\mu)}$, $f_{2,v}(x) = \sum_{1-x_\mu < x} a_v^{(\mu)}$ и $a_v(x)$ абсолютно непрерывна.

Заметим, что в случае $p_v \neq 0$

$$\frac{1}{\Gamma(p_v)} \sigma_v(x) = (I_{p_v} f_{1,v})(x) - (I_{p_v} f_{2,v})(1-x) + (I_{p_v} a_v)(x),$$

где $b_v(x)$ абсолютно непрерывна и I_{p_v} обозначает оператор интегрирования порядка p_v . Число $k_v = l_v - p_v$ назовем порядком функционала U_v . Систему граничных условий (7) будем называть регулярной, если отличны от нуля числа $\theta_0^{(j)}$ и $\theta_1^{(j)}$ ($\theta_{-1}^{(j)}$ и $\theta_1^{(j)}$), определенные равенством (4) (соответственно (5)), где произведены замены α_v на $\alpha_v^{(1)} (-1)^{i_v}$ и β_v на $\alpha_v^{(N)}$ ($v = 1, 2, \dots, n$). Отметим, что регулярные условия в теперешнем смысле заведомо $(n-1)$ -регулярны в прежнем смысле, и, согласно теореме 1, система с. и п.ф. полна.

Теорема 3. Каждая функция $f(x)$ из области определения оператора, порождаемого дифференциальной операцией (1) и регулярными граничными условиями (7) разлагается в ряд по собственным и присоединенным функциям, сходящийся в смысле C^{n-1} -метрики, по крайней мере, при некоторой группировке его членов, общей для всех $f(x)$.

* Дефектом системы E в пространстве C^k называется размерность подпространства функционалов в C^k , аннулирующих все элементы из E .

** $[k]$ — целая часть числа k .

Для доказательства теоремы мы исследуем асимптотику характеристического детерминанта $\Delta(\lambda)$, после чего применяем классический метод Биркгофа — Тамаркина (¹⁻³). При этом важно, что для функционалов вида (7) можно вывести асимптотику преобразования Лапласа $U_v[e^{zx}]$ во всей z -плоскости.

В заключение автор выражает глубокую благодарность проф. Ю. И. Любичу, под руководством которого была выполнена эта работа.

Харьковский государственный университет
им. А. М. Горького

Поступило
23 XII 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Я. Д. Тамаркин, О некоторых общих задачах теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, Петроград, 1917. ² G. D. Birkhoff, Trans. Am. Math. Soc., 9, 373 (1908). ³ М. А. Наймарк, Линейные дифференциальные операторы, «Наука», 1969. ⁴ Е. Камке, Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, ИЛ, 1950. ⁵ Ю. И. Любич, Изв. высш. учебн. завед., Математика, № 4, 94 (1959).