Доклады Академии наук СССР
1971. Том 197, № 3

УДК 539.3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

С. Д. ВОЛКОВ

О ПОТЕНЦИАЛЕ АНИЗОТРОПИИ В ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

(Представлено академиком Ю. Н. Работновым 9 X 1970)

Решение краевой задачи теории упругости однородного анизотропного тела при случайных граничных условиях сводится на основе понятия о потенциале анизотропии к решению двух более простых задач: 1) соответствующей краевой задачи для изотропного тела, 2) задачи для уравнения, аналогичного уравнению Пуассона. В частном случае, когда граничные условия детерминированы, получается метод решения классической краевой задачи теории упругости однородных анизотропных тел.

1. Пусть $\sigma(x)$, $\varepsilon(x)$, $\chi(x)$ — тензорные случайные функции детерминированного радиуса-вектора x, описывающие поля напряжений, деформаций и перемещений точек данной неслучайной в исходном состоянии области V с границей S; C — детерминированный постоянный тензор модулей упругости. Рассмотрим систему уравнений

$$\nabla\cdot\sigma=0,\quad \varepsilon=\operatorname{def}\chi,\quad \sigma=C\cdot\cdot\varepsilon \tag{1,1}$$

при граничных условиях $\chi|_s=\chi^{(s)}(x)$. Здесь, как обычно, случайные функции задаются моментными функциями различных порядков, следовательно, уравнения (1,1) и граничные условия имеют операторный смысл.

Тензор C представим как сумму изотропного тензора C^* и девиатора C^{**}:

$$C=C^*+C^{**}. \tag{1,2}$$

Чтобы разложение (1,2) было единственным, условимся выполнять его по правилу: $\overset{*}{C}_{1111}=C_{1111}$, $\overset{*}{C}_{1122}=C_{1122}$, $\overset{*}{C}_{2323}={}^1/_2\,(C_{1111}-C_{1122})$.

Положим $\xi=C^*\cdot\cdot\,\varepsilon$, $\rho=C^{**}\cdot\cdot\,\varepsilon$. Тогда по (1,1) и (1,2) имеем вспомогательную краевую задачу

$$\nabla\cdot\xi=-\nabla\cdot\rho,\quad \varepsilon=\operatorname{def}\chi,\quad \xi=C^*\cdot\cdot\,\varepsilon. \tag{1,3}$$

Исключаем в (1,3) функции $\xi(x)$ и $\varepsilon(x)$

$$\nabla\cdot C^*\cdot\cdot\operatorname{def}\chi=-\nabla\cdot\rho. \tag{1,4}$$

Решение уравнения (1,4) будем искать как сумму общего решения χ^* соответствующего однородного уравнения

$$\nabla\cdot C^*\cdot\operatorname{def}\chi^*=0 \tag{1,5}$$

и частного решения χ^{**} неоднородного уравнения (1,4). Чтобы выделить частное решение, вводим скалярную случайную функцию $\Omega_0(x)$, связанную с вектором χ^{**} равенством

$$\chi^{**}=\nabla\Omega_0. \tag{1,6}$$

Перемещения χ^{**} обусловлены, очевидно, анизотропией материала. Следовательно, функция $\Omega_0(x)$ имеет смысл случайного потенциала перемещений, вызванных анизотропией (случайного потенциала анизотропии). Аналогичное понятие вводится в термоупругости — потенциал термоупругих перемещений.

Положим C_{ijmn}, $\overset{*}{C}_{ijmn}$, $\overset{**}{C}_{ijmn}$ — составляющие тензоров C, C^* и C^{**} соответственно; $\overset{**}{C}_M=\max|\overset{**}{C}_{ijmn}|$, $\overset{**}{C}_0$ — тензор, имеющий составляющие

$C^{**0}_{ijmn} = C^{**}_{ijmn}(C^{**}_M)^{-1}$; $l = C^{**}_M(C^{*}_{1111})^{-1}$. Подставляем (1,6) в (1.4). Учитывая свойства изотропного тензора C^* и полагая $\varphi = -l\nabla\cdot C^{**}_0\cdot\cdot\operatorname{def}\chi$, преобразуем полученное уравнение к виду

$$\Delta\chi^{**} = \varphi. \qquad (1,7)$$

Уравнение (1,7) можно рассматривать как аналог уравнения Пуассона. Оно отличается от обычного уравнения Пуассона, применяемого, например, в термоупругости, не только физическим смыслом входящих в него величин, но и тем, что функция $\varphi(x)$ — правая часть этого уравнения — содержит искомый вектор $\chi^{**}(x)$.

2. Однородное уравнение (1,5) с точностью до обозначений совпадает с известным классическим уравнением в перемещениях теории упругости однородных изотропных тел. Поэтому методы его решения известны. Следовательно, функцию $\chi^*(x)$ в дальнейшем можно считать известной. Переходим к решению уравнения (1,7). Положим

$$Z\chi = \nabla\cdot C^{**}_0\cdot\cdot\operatorname{def}\chi, \quad T\chi = -\int\limits_V G(x, x')Z'\chi' dV',$$

$$\psi(x) = -\int\limits_s \frac{\partial G(x, x')}{\partial n'}\chi' dS', \quad \Delta G(x, x') = -\delta(x - x'), \quad G|_s = 0. \qquad (2,1)$$

Здесь звездочки у функции χ опущены.

Применяем к уравнению (1,7) формулу Грина. С учетом (2,1) получаем интегро-дифференциальное уравнение

$$\chi^{**} = lT\chi^{**} + \psi. \qquad (2,2)$$

Введя обозначения $T^k\psi = T(T^{k-1}\psi)$, решаем уравнение (2,2) методом итераций. Находим

$$\chi^{**} = \sum_{k=0}^{\infty} l^k T^k \psi. \qquad (2,3)$$

Формула (2,3) представляет искомое частное решение неоднородного уравнения (1,4), если: 1) известна для данной области V регулярная часть функции Грина $G(x, x')$, 2) ряд (2,3) сходится.

Поскольку методы определения функции Грина уравнения Лапласа известны из теории гармонических функций, в дальнейшем ограничимся выяснением условий сходимости ряда (2,3).

3. Пусть L, D, M, Q — конечные положительные скалярные величины; $|\psi|$ — модули составляющих вектора ψ, $|Z\psi|$ — то же вектора $Z\psi$; $(ZG)_{ij}$ — составляющие тензора ZG; P — вероятность. Введем ограничения

$$P(\sup|\psi| < L) = 1, \quad P(\sup|Z\psi| < D) = 1,$$

$$\sup\int\limits_V |G(x, x')|\,dV' = M, \quad \sup\int\limits_V |(ZG)'_{ij}|\,dV' = \frac{Q}{3}. \qquad (3,1)$$

Оценим элементы последовательности $\Phi_k = T^k\psi$. Имеем $\Phi_0 = \psi$. По (3,1) находим $P(|\Phi_0| \leqslant L) = 1$. Далее,

$$P(\sup|Z\Phi_0| \leqslant D) = 1; \quad |\Phi_1| \leqslant \int\limits_V |G|\cdot|Z'\Phi'_0|\,dV' \leqslant MD,$$

$$P(|\Phi_1| \leqslant MD) = 1.$$

Принимая во внимание, что вектор $ZGZ'\Phi_0'$ имеет составляющие — свертки

$$(ZGZ'\Phi'_0)_i = (ZG')_{i\alpha}(Z'\Phi'_0)_\alpha, \qquad (3,2)$$

находим

$$|Z\Phi_1| \leqslant \int\limits_V |ZG|\cdot|Z'\Phi'_0|\,dV' \leqslant QD, \quad P(|Z\Phi_1| \leqslant QD) = 1;$$

$$P(|\Phi_2| \leqslant MDQ) = 1, \quad P(|\Phi_3| < MDQ^2) = 1, \ldots$$

Используем ограничения (3,1) и последующие оценки для построения ряда, мажорирующего итерационный ряд (2,3) в вероятностном смысле. Мажорирующий ряд

$$L+\frac{MD}{Q}\sum_{k=0}^{\infty} l^k Q^k = L+\frac{MD}{Q(1-lQ)}$$

сходится, если выполнено условие ($l^* = l - a$, $0 < a \leqslant 1$):

$$l^* = 1/Q. \tag{3,3}$$

Чтобы оценить параметр Q, будем предполагать, что область V имеет конечные размеры и достаточно гладкую границу S, так что справедливы неравенства

$$0 \leqslant G(x,x') \leqslant G_R(x,x'),$$

где $G_R(x, x')$ — функция Грина описанного шара. Положим, что r — текущий радиус. При упомянутых условиях справедливы неравенства для трехмерной V и двумерной V_1 областей соответственно:

$$\int\limits_V G(x,x')\,dV' \leqslant \frac{R^2-r^2}{6}, \quad \int\limits_{V_1} G(x,x')\,dV' \leqslant \frac{R^2-r^2}{4}. \tag{3,4}$$

Чтобы установить правила применения оператора Z к скалярным функциям, выпишем формулы (3,2) в явном виде:

$$(ZGZ'\Phi_0')_i = C^{**0}_{i\alpha\beta\gamma}\,\frac{\partial^2 G(x,x')}{\partial x_\alpha \partial x_\gamma}\int\limits_s C^{**0}_{\beta\varphi\rho\psi}\,\frac{\partial^3 G(x',x'')}{\partial x_\varphi' \partial x_\psi' \partial n''}\,\chi_\rho'' dS''. \tag{3,5}$$

Из (3,5) получаем

$$(ZG)_{ij} = C^{**0}_{i\alpha j\beta}\,\frac{\partial^2 G(x,x')}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}. \tag{3,6}$$

Применяем оператор Z к (3,4). С учетом (3,6) имеем

$$\frac{1}{6}C^{**0}_{i\alpha j\beta}\,\frac{\partial^2 r^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \leqslant \frac{1}{6}\,|C^{**0}_{i\alpha j\beta}|\,\frac{\partial^2 r^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \leqslant 1, \quad \int\limits_V |(ZG)_{ij}|\,dV' \leqslant 1. \tag{3,7}$$

Полагая согласно (3,7) $Q=3$, заменяем (3,3) критерием

$$l = {}^1/_3 - a. \tag{3,8}$$

Критерий (3,8) является лишь достаточным, так как он относится к мажорирующему ряду. Для итерационного ряда существуют, по-видимому, менее ограничительные условия сходимости.

4. Если функция $\chi^{**}(x)$ определена из (2,3), то по (1,3) можно найти тензор обусловленных анизотропией деформаций $\varepsilon^{**} = \operatorname{def}\chi^{**}$ и соответствующий тензор напряжений $\sigma^{**} = C\cdot\cdot\,\varepsilon^{**}$. На границе S области V величины $\tau_n = n_\alpha \vartheta_{n\alpha}{}^{**}$ образуют дополнительную систему случайных сил, которую нужно учитывать при решении однородной системы уравнений (1,5).

Функция $\chi = \chi^* + \chi^{**}$ представляет решение в реализациях. Чтобы найти решение в моментных функциях, нужно применить оператор математического ожидания и обычную процедуру построения моментных функций второго и более высокого порядков.

Пример. Модули упругости монокристалла железа (кубическая симметрия): $C_{1111} = 28{,}7\cdot 10^3$ кГ/мм², $C_{1122} = 14{,}1\cdot 10^3$ кГ/мм², $C_{2323} = 11{,}6\cdot 10^3$ кГ/мм². Отсюда $C^*_{1111} = C_{1111}$, $C^*_{1122} = C_{1122}$, $C^*_{2323} = 7{,}3\cdot 10^3$ кГ/мм². Отличные от нуля составляющие девиатора $C^{**}_{2323} = 4{,}3\cdot 10^3$ кГ/мм². Полагаем $C^{**}_M = 4{,}3\cdot 10^3$ кГ/мм². Тогда $l = 0{,}15$. По критерию (3,8) итерационный ряд сходится.

Уральский политехнический институт
им. С. М. Кирова
Свердловск

Поступило
3 IX 1970