Доклады Академии наук СССР
1971. Том 198, № 6

УДК 511.5 *МАТЕМАТИКА*

Л. А. КОГАН

ГИПОТЕЗА И. М. ВИНОГРАДОВА О НАИМЕНЬШЕМ КВАДРАТИЧНОМ НЕВЫЧЕТЕ И ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЧИСЕЛ КВАДРАТИЧНЫМИ ФОРМАМИ

(*Представлено академиком Ю. В. Линником 11 I 1971*)

В предлагаемой заметке на основе известной гипотезы И. М. Виноградова [1] о наименьшем квадратичном невычете решается вопрос о существовании формул типа Лиувилля* для квадратичных форм типа $(-k, q, 1)$, $k \geqslant 2$ четное, q нечетное простое, $(-k, q, \chi)$, $k \geqslant 3$ нечетное, $\chi(n) = \left(\frac{n}{q}\right)$ — обобщенный символ Якоби, q нечетное простое.

Пусть

$$Q(x_1, \ldots, x_{2k}) \tag{1}$$

— положительная квадратичная форма от $2k$ переменных ступени N; $k \geqslant 2$ — целое число. Отвечающий ей тэта-ряд представим в виде двух слагаемых:

$$\sum_{x_1, \ldots, x_{2k}=-\infty}^{\infty} \exp\left[2\pi i\tau Q(x_1, \ldots, x_{2k})\right] = E(\tau) + \theta(\tau). \tag{2}$$

Здесь τ — комплексное число, $\operatorname{Im}\tau > 0$; $E(\tau)$ — ряд Эйзенштейна, соответствующий тэта-ряду, находящемуся в левой части равенства (2). $\theta(\tau)$ — параболическая форма.

Определение. Если форма $\theta(\tau)$ может быть представлена в виде конечной линейной комбинации обобщенных бинарных тэта-рядов вида

$$\sum_{\substack{x_1, x_2=-\infty \\ x_r \equiv h_r (\operatorname{mod} N_a) \\ r=1,2}}^{\infty} P_{k-1}(x_1, x_2) \exp\left[2\pi i\tau \frac{G(x_1, x_2)}{N_a^2} t_a\right], \tag{3}$$

где $t_a > 0$ — целое число; $G_a(x_1, x_2)$ — целочисленная положительная квадратичная форма ступени N_a (N_a пробегает делители N); $P_{k-1}(x_1, x_2)$ — шаровая функция $(k-1)$-го порядка относительно G_a; h_1, h_2 — целые числа с условием

$$\frac{\partial}{\partial x_r} G_a(x_1, x_2)\Big|_{\substack{x_1=h_1 \\ x_2=h_2}} \equiv 0 \ (\operatorname{mod} N_a),$$

то квадратичную форму (1) будем называть лиувиллевской. Формулу для количества представлений формой (1), вытекающую из (2), будем называть типа Лиувилля.

Лиувилль и позднее Эрмит, Успенский и другие нашли формулы для количества представлений чисел многими квадратичными формами с 4 и 6 переменными, которые являются формулами типа Лиувилля строго в определенном выше смысле.

* Заметим, что из формулы типа Лиувилля для числа представлений числа n формой $Q(x_1, \ldots, x_{2k})$ следует асимптотическая формула с остаточным членом вида $B_\varepsilon n^{1/2(k-1)+\varepsilon}$. Такие результаты пока удается получить лишь на основе гипотезы Рамануджана — Петерсона, которая в настоящее время доказана Эйхлером [5] для случая $k = 2$.

В работах [2, 3] высказано предположение, что число классов примитивных лиувиллевских квадратичных форм конечно и для некоторых частных случаев это предположение обосновано.

К дополнению к теореме 1 работы [2] нами получены следующие результаты.

На основе гипотезы И. М. Виноградова * [1] о наименьшем квадратичном невычете по простому $\bmod p$ доказаны условные теоремы.

Теорема 1. *Число классов примитивных лиувиллевских квадратичных форм типа* $(-k, q, \chi)$, *q нечетное простое*, $\chi(n) = \left(\frac{n}{q}\right)$ — *обобщенный символ Якоби*, $k \geqslant 2$ *нечетное, конечно.*

Теорема 2. *Число классов примитивных лиувиллевских квадратичных форм типа* $(-k, q, 1)$, *q нечетное простое*, $k \geqslant 2$ *четное, конечно.*

На основе результатов [4] о наименьшем квадратичном невычете доказаны теоремы 3, 4.

Теорема 3. *По любому вещественному числу* $\varepsilon > 0$ *найдется такое число* C_0, *зависящее только от* ε, *что если простое число q и целое число* $l \geqslant 0$ *удовлетворяют условиям*

$$q > C_0, \quad (k-1)\left(\frac{1}{4\sqrt{e}} + \varepsilon\right) - {}^1/_2 < l \leqslant k-1, \tag{4}$$

то ни одна квадратичная форма типа $(-k, q, \chi)$, *q нечетное простое*, $\chi(n) = \left(\frac{n}{q}\right)$ — *обобщенный символ Якоби*, $k \geqslant 2$ *нечетное, и дискриминанта* q^{2l+1} *не является лиувиллевской.*

(В заметке эта теорема и теорема 1 сформулированы для лиувиллевских квадратичных форм в узком смысле.)

Теорема 4. *По любому вещественному числу* $\varepsilon > 0$ *найдется такое число* C_0, *зависящее только от* ε, *что если простое число q и целое число* $l \geqslant 0$ *удовлетворяют условиям*

$$q > C_0, \quad (k-1)\left(\frac{1}{4\sqrt{e}} + \varepsilon\right) < l \leqslant k-1, \tag{5}$$

то ни одна квадратичная форма типа $(-k, q, 1)$, *q нечетное простое*, $k \geqslant 2$ *четное, и дискриминанта* q^{2l} *не является лиувиллевской.*

Ташкентское высшее общевойсковое
командное училище
им. В. И. Ленина

Поступило
7 I 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. О. Гельфонд, Ю. В. Линник, Элементарные методы в аналитической теории чисел, М., 1962. [2] Л. А. Коган, ДАН, 182, 259 (1968). [3] Л. А. Коган, Литовский матем сборн., 9, № 3, 520 (1969). [4] D. Burgess, Сборн., пер., Математика, 4, № 8, 2, 106 (1957). [5] M. Eichler, Arch. math., 5, 355 (1954).

* А. И. Виноградов сообщил мне, что эта гипотеза И. М. Виноградова справедлива для почти всех p.