Доклады Академии наук СССР
1971. Том 199, № 4

УДК 517.941 *МАТЕМАТИКА*

М. Г. ГАСЫМОВ

К ТЕОРИИ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ ПУЧКОВ

(Представлено академиком И. Н. Векуа 25 I 1971)

1. Постановка задачи. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ и A являются линейными операторами в гильбертовом пространстве H. В дальнейшем предполагаем, что a) A является замкнутым оператором в H с областью определения $D(A)$, b) A^{-1} вполне непрерывный, c) A_jA^{-j} суть ограниченные операторы в H.

Рассмотрим полиномиальный пучок

$$P(\lambda) = (i\lambda)^n + (i\lambda)^{n-1}A_1 + \ldots + i\lambda A_{n-1} + A^n,$$

который при каждом λ является замкнутым оператором в $D(A^n)$ и имеет дискретный спектр. Систему собственных и присоединенных векторов пучка $P(\lambda)$, которые отвечают собственным значениям из области Λ, обозначим через $K(\Lambda)$.

Определение 1. Система $K(\Lambda)$ называется k-кратно полной в H, если для любого набора k векторов $f_0, \ldots, f_{k-1}$ из H из голоморфности вектор-функции

$$(P^*(\bar{\lambda}))^{-1}\{f_0 + \lambda f_1 + \ldots + \lambda^{k-1}f_{k-1}\}$$

в области $\bar{\Lambda} = \{\lambda; \bar{\lambda} \in \Lambda\}$ вытекает, что $f_0 = \ldots = f_{k-1} = 0$.

Данное определение кратной полноты отличается от определения М. В. Келдыша [1]. Можно показать, что оба определения эквивалентны, если $k = n$ и Λ совпадает со всей комплексной плоскостью. Однако определение 1 допускает обобщение на операторные пучки с любой природой спектра в гильбертовом или банаховом пространстве.

В дальнейшем предполагается, что $\Lambda = \{\lambda; \operatorname{Re}\lambda < 0\}$.

В данной заметке исследуется следующая задача: когда система $K(\Lambda)$ будет k-кратно полной в H?

Общая схема решения описывается в п. 2, в п.п. 3 и 4 приводятся положительные операторные пучки, для которых $n = 2k$ и $K(\Lambda)$ образуют k-кратно полную систему в H (см. теоремы 1, 2, 3).

Заметим, что положительные пучки второго порядка подробно исследованы в работах М. Г. Крейна и Г. К. Лангера [2] (см. также [3]) и И. В. Горюка [4, 5] методом, отличным от излагаемого.

Наш метод решения задачи связан с возможностью постановки k-регулярной задачи Коши для уравнения $P(d/dt) = f$ (см. определение 2 и теорему 1).

2. Схема решения основной задачи. Рассмотрим уравнение

$$P(d/dt)u = 0 \tag{1}$$

с начальными условиями

$$u(0) = \varphi_0, \ldots, u_t^{(k-1)}(0) = \varphi_{k-1}, \quad k \leqslant n. \tag{2}$$

Определение 2. Задача (1, 2) называется k-регулярной задачей Коши, если для любого набора векторов $\varphi_j \in D(A^{n-j-1})$, $j =$

$= 0, \ldots, k-1$, существует вектор-функция $u(t)$ такая, что

a) интеграл $\int\limits_0^\infty \|u(t)\|_H^2 \, dt$ сходится;

b) $u(t)$ имеет $(n-1)$ сильно непрерывную производную на $(0, \infty)$;

c) $u^{(j)}(t) \in D(A^{n-j})$ при каждом t из $(0, \infty)$ и $P(d/dt)u(t) = 0$;

d) $\lim\limits_{t \to +0} u_t^{(j)}(t) = \varphi_j$, $j = 0, \ldots, k-1$;

e) пределы $\lim\limits_{t \to +0} u_t^{(j)}(t)$ при $j = k, \ldots, n-1$ существуют и принадлежат $D(A^{n-j-1})$.

Определение 3. Пусть операторный пучок $P(i\lambda)$ удовлетворяет следующим условиям:

a) резольвента $P^{-1}(\lambda)$ представляется в виде отношения двух целых функций порядка ρ и конечного типа σ при порядке ρ;

b) при некотором $\theta > 0$ и для больших λ из секторов $S_\pm = \{\lambda;\ \lambda = re^{\pm i\varphi}, \pi/2 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2 + \theta;\ 0 < r\}$ имеет место оценка

$$\|P^{-1}(\lambda)\| \leqslant c/|\lambda|^\alpha, \quad n-1 < \alpha \leqslant n; \tag{3}$$

c) существует система $\{L\}$ лучей из левой полуплоскости, в том числе лучи $R_{\pm\theta} = \{\lambda;\ \lambda = -re^{\pm i\theta}, 0 < r < \infty\}$, для которых угол между соседними лучами меньше, чем π/ρ, и на которых растет не быстрее, чем $|\lambda|^\beta$, где β — некоторое число.

Тогда скажем, что $P(\lambda)$ принадлежит классу $H_{\rho,\sigma}$.

Теорема 1. *Пусть задача* (1), (2) *является k-регулярной и пучок* $P(\lambda) \in H_{\rho,\sigma}$.

Тогда $K(\Lambda)$ образует k-кратно полную систему в H.

Приведем краткое доказательство. Пусть существуют элементы $f_j \in H$, $j = 0, \ldots, k-1$, среди которых хотя бы один отличен от нуля, $(P^*(\lambda))^{-1}\}f_0 + \lambda f_1 + \ldots \lambda^{k-1} f_{k-1}\}$ является аналитической функцией в Λ и $u(t)$ обозначает решение задачи (1), (2), где $\varphi_j \in D(A^{n-j-1})$. Положим

$$\hat{u}(\lambda) = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} u(t)\, dt.$$

Тогда $\hat{u}(\lambda) = P^{-1}(\lambda) Q(\lambda)$, где

$$Q(\lambda) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{\lambda^{j+1}} \left\{P(\lambda) - \sum_{k=0}^{j} \lambda^k A_{n-k}\right\} u_t^{(j)}(+0).$$

Здесь $A_n = A^n$. Очевидно, что $u(\lambda)$ является ограниченной вектор-функцией в правой полуплоскости и

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-i\infty}^{i\infty} \hat{u}(\lambda)\, e^{\lambda t}\, d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_S \hat{u}(\lambda)\, e^{\lambda t} d\lambda.$$

В последнем интеграле для больших λ контур S совпадает с лучами $R_{+\theta}$ и $R_{-\theta}$ (см. [6], стр. 57) и под знаком интеграла можно дифференцировать по t любое число раз при $t > 0$. Поэтому

$$\sum_{j=0}^{k-1} (u_t^{(j)}(t), f_j) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_S v(\lambda)\, e^{\lambda t}\, d\lambda, \tag{4}$$

где

$$v(\lambda) = \sum_{j=0}^{k-1} (\lambda^j \hat{u}(\lambda), f_j).$$

Из наших допущений следует, что $v(\lambda)$ является целой функцией порядка ρ и конечного типа, которая в правой полуплоскости ограничена, а на системе лучей $\{L\}$ из левой полуплоскости растет не быстрее, чем $|\lambda|^{n+\beta}$. Тогда $v(\lambda)$ является многочленом. Поэтому интеграл в правой части формулы (4) равен нулю при $t > 0$. Следовательно, $\sum_{j=0}^{k-1} (u_t^{(j)}(t), f_j) = 0$. Здесь можно перейти к пределу при $t \to +0$. В результате $\sum_{j=0}^{k-1} (\varphi_j, f_j) = 0$. Отсюда $f_0 = \ldots = f_{k-1} = 0$, поскольку φ_j — любой вектор из $D(A^{n-j-1})$. Получили противоречие. Теорема доказана.

Замечание 1. Может случиться, что система $K(\Lambda)$ является k-кратно полной, однако совокупность всех собственных и присоединенных векторов пучка $P(\lambda)$ не образует n-кратно полную систему в H (конечно, если $k < n$).

3. Положительный пучок в конечно-мерном пространстве E^m. В этом пункте $H = E^m$.

Определение 4. Пучок $P(\lambda)$ называется положительным в E^m, если при всех вещественных значениях ξ оператор $P(i\xi)$ является положительным в E^m.

Очевидно, что для положительного пучка необходимо $n = 2k$, $A_{2k} > 0$.

Теорема 2. *Если $P(\lambda)$ является положительным пучком в E^m, то $K(\Lambda)$ образует k-кратно полную систему в H.*

4. Положительный пучок в гильбертовом пространстве.

Определение 5. Пучок $P(\lambda)$ назовем положительным пучком, если $P(i\xi)$ является положительным оператором в E^m с областью определения $D(A^n)$ при любом вещественном ξ.

Предложение 1. *Если $P(\lambda)$ — положительный пучок, то необходимо $n = 2k$, A^{2k} — положительный, а все A_j — симметрические операторы в множестве $D(A^{2k})$.*

Пусть $L_2(0, \infty; H)$ обозначает множество вектор-функций со значениями из H, для которых

$$\|u(t)\|_{L_2} = \left(\int_0^\infty \|u(t)\|_H^2\, dt\right)^{1/2} < \infty.$$

Пусть $u(t) \in L_2(0, \infty; H)$ и обладает свойствами:

a) имеет сильно непрерывные производные на $(0, \infty)$ до $(n-1)$ порядка включительно;

b) $u^{(j)}(t) \in D(A^{n-j})$ при каждом $t > 0$ и $j = 0, \ldots, 2k-1$;

c) $\lim_{t\to+0} u^{(j)}(t) = 0, \quad j = 0, \ldots, k-1$;

d) $u^{(j)}(+0) \in D(A^{n-j-1}), j = k, \ldots, n-1$;

e) $P_0(d/dt)u \equiv \{(-1)^k (d/dt)^{2k} + A^{2k}\} u(t) \in L_2(0, \infty; H)$.

Обозначим через $D_t(P_0)$ множество всех функций, которые обладают перечисленными свойствами.

Определение 6. Положительный пучок $P(\lambda)$ назовем сильно положительным, если для всех $u(t)$ из $D_t(P_0)$ имеет место неравенство

$$\begin{gathered}\|[P(d/dt) - P_0(d/dt)]u(t)\|_{L_2} \leqslant \\ \leqslant a\|P_0(d/dt)u\|_{L_2} + b\|u(t)\|_{L_2},\end{gathered}$$

где $a < 1$ и $b \geqslant 0$.

Предложение 2. *Если $P(\lambda)$ — сильно положительный пучок, то задача (1), (2) является k-регулярной задачей Коши.*

Предложение 3. *Если при любом* $\varepsilon > 0$ *пучок* $P_0(\lambda) \in H_{1+\varepsilon, 0}$, $\|A_j A^{-j}\| \leqslant \alpha_j$ *и*

$$\sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \left(\frac{j}{n-j}\right)^{j/n} \frac{n-j}{n-j+1} < 1,$$

то

$$P(\lambda) \in H_{1+\varepsilon, 0}$$

Предложение 4. *Если* $P_0(\lambda) \in H_{\rho, \sigma}$, *а операторы* $A_j A^{-j}$ *вполне непрерывны, то* $P(\lambda) \in H_{\rho, \sigma}$.

Таким образом, мы приходим к следующему результату.

Теорема 3. *Пусть* $P(\lambda)$ *является сильно положительным пучком в смысле определения 6 и выполняются условия предложения 3 или предложения 4.*

Тогда $n = 2k$ *и система* $K(\Lambda)$ *для пучка* $P(\lambda)$ *является* k*-кратно полной в* H.

Замечание 2. Для квадратичного пучка можно сравнить результаты теоремы 3 с результатами работ [2-5]. Квадратичный пучок $P(\lambda) = -\lambda^2 + i\lambda A_1 + A_2$ будет сильно положительным, если 1) $A_2 > 0$, 2) A_1 — симметрический оператор в $D(A_2)$ и 3) $\|A_1 A_2^{1/2}\| < 2$. Поэтому утверждение теоремы 3 имеет место, если, например, $A_2^{1/2}$ является ядерным оператором или оператор $A_1 A_2^{-1/2}$ является вполне непрерывным и оператор $A_2^{-1/2} \in \sigma_\rho$.

Пример. Граничная задача.

$$L(\lambda)y = -\lambda^2 y + \lambda a y' - y'', \quad y(0) = y(1) = 0$$

удовлетворяет условиям теоремы 3, если $-2 < a < 2$. Эта задача изучена в [7].

Институт математики и механики
Академии наук АзербССР
Баку

Поступило
28 XII 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. В. Келдыш, ДАН, 77, № 1 (1951). [2] М. Г. Крейн, Г. К. Лангер, ДАН, 154, № 6, 1258 (1964). [3] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, Введение в теорию несамосопряженных операторов, «Наука», 1965. [4] И. В. Горюк, Вестн. Московск. унив., № 1, 55 (1970). [5] И. В. Горюк, Вестн. Московск. унив., № 5, 28 (1970). [6] А. М. Эфрос, А. М. Данилевский, Операционное исчисление и контурные интегралы, Харьков, 1937. [7] М. Г. Джавадов, ДАН, 159, № 4, 723 (1964).