Доклады Академии наук СССР
1971. Том 199, № 4

УДК 513.838 *МАТЕМАТИКА*

В. Д. ГОЛОВИН

ДВОЙСТВЕННОСТЬ ДЛЯ КОГОМОЛОГИЙ С КОМПАКТНЫМИ НОСИТЕЛЯМИ

(Представлено академиком В. С. Владимировым 25 I 1971)

В настоящей работе намечено доказательство теоремы двойственности для пространств когомологий с компактными носителями комплексного аналитического многообразия, счетного в бесконечности, с коэффициентами в произвольном когерентном аналитическом пучке. Указаны также некоторые приложения этой теоремы.

1. Пусть X — комплексное аналитическое многообразие, счетное в бесконечности, и $\mathscr{F}$ — когерентный аналитический пучок на X. Пусть $\mathcal{O}$ обозначает пучок ростков голоморфных функций на X, а $\mathscr{E}^{p,q}$ — пучок ростков бесконечно дифференцируемых внешних дифференциальных форм двойной степени (p, q). При фиксированном p рассмотрим комплекс $\Gamma_c(X; \mathscr{E}^{p,*}\otimes_{\mathcal{O}}\mathscr{F})$ векторых пространств сечений с компактными носителями $\Gamma_c(X; \mathscr{E}^{p,q}\otimes_{\mathcal{O}}\mathscr{F})$ $(q=0, 1, \ldots)$ с когpаничным оператором

$$d'': \Gamma_c(X; \mathscr{E}^{p,q}\otimes_{\mathcal{O}}\mathscr{F}) \to \Gamma_c(X; \mathscr{E}^{p,q+1}\otimes_{\mathcal{O}}\mathscr{F}),$$

индуцированным внешним дифференциалом $d'': \mathscr{E}^{p,q}\to\mathscr{E}^{p,q+1}$.

Пусть Ω^p — пучок ростков голоморфных внешних дифференциальных форм степени p на X. Так как последовательность пучков и гомоморфизмов

$$0\to\Omega^p\otimes_{\mathcal{O}}\mathscr{F}\to\mathscr{E}^{p,0}\otimes_{\mathcal{O}}\mathscr{F}\to\mathscr{E}^{p,1}\otimes_{\mathcal{O}}\mathscr{F}\to\ldots$$

точна, то при $q\geqslant 0$ векторные пространства когомологий $H_c{}^q(X; \Omega_p\otimes_{\mathcal{O}}\mathscr{F})$ и $H^q\Gamma_c(X; \mathscr{E}^{p,*}\otimes_{\mathcal{O}}\mathscr{F})$ канонически изоморфны.

Каждая точка многообразия X обладает открытой окрестностью U, над которой при некотором m определен эпиморфизм пучков $\pi: \mathcal{O}^m\to\mathscr{F}$. Тем самым над U точна последовательность

$$0\to\mathscr{E}^{p,q}\mathscr{R}\to(\mathscr{E}^{p,q})^m\to\mathscr{E}^{p,q}\otimes_{\mathcal{O}}\mathscr{F}\to 0,$$

где $\mathscr{R}=\operatorname{Ker}\pi$. Отсюда получаем изоморфизм векторных пространств $\Gamma(U; \mathscr{E}^{p,q}\otimes_{\mathcal{O}}\mathscr{F})$ и $\Gamma(U; (\mathscr{E}^{p,q})^m)\,/\,\Gamma(U; \mathscr{E}^{p,q}\mathscr{R})$. Пространство $\Gamma(U; \mathscr{E}^{p,q}\otimes_{\mathcal{O}}\mathscr{F})$ наделим топологией, индуцированной обычной топологией пространства $\Gamma(U; \mathscr{E}^{p,q})$ при этом изоморфизме; можно показать, что эта топология не зависит от выбора эпиморфизма π и является топологией пространства Фреше.

Пусть $\mathfrak{U}$ — достаточно мелкое, локально конечное открытое покрытие многообразия X. Пространство $\Gamma(X; \mathscr{E}^{p,q}\otimes_{\mathcal{O}}\mathscr{F})$ наделим слабейшей из топологий, для которых непрерывны отображения сужения $\Gamma(X; \mathscr{E}^{p,q}\otimes_{\mathcal{O}}\mathscr{F})\to\Gamma(U; \mathscr{E}^{p,q}\otimes_{\mathcal{O}}\mathscr{F})$ $(U\in\mathfrak{U})$; эта топология не зависит от выбора покрытия $\mathfrak{U}$ и является топологией пространства Фреше (ср. ([1])). Для каждого компактного множества $K\subset X$ наделим векторное пространство сечений $\Gamma_K(X; \mathscr{E}^{p,q}\otimes_{\mathcal{O}}\mathscr{F})$ с носителями в K топологией, индуцированной из $\Gamma(X; \mathscr{E}^{p,q}\otimes_{\mathcal{O}}\mathscr{F})$, а пространство $\Gamma_c(X; \mathscr{E}^{p,q}\otimes_{\mathcal{O}}\mathscr{F})$ — сильнейшей из локально выпуклых топологий, для которых непрерывны вложения $\Gamma_K(X; \mathscr{E}^{p,q}\otimes_{\mathcal{O}}\mathscr{F})\to\Gamma_c(X; \mathscr{E}^{p,q}\otimes_{\mathcal{O}}\mathscr{F})$.

Векторное пространство когомологий $H^q\Gamma_c(X; \mathscr{E}^{p,*}\otimes_{\mathscr{O}}\mathscr{F})$ наделим топологией фактор-пространства $\operatorname{Ker} d''/\operatorname{Im} d''$; пространство $H_c^q(X; \Omega^p\otimes_{\mathscr{O}}\mathscr{F})$ наделим топологией, индуцированной из $H^q\Gamma_c(X; \mathscr{E}^{p,*}\otimes_{\mathscr{O}}\mathscr{F})$ при каноническом изоморфизме этих пространств. Через $\tilde{H}_c^q(X; \Omega^p\otimes_{\mathscr{O}}\mathscr{F})$ будем обозначать отделимое локально выпуклое пространство, ассоциированное с пространством $H_c^q(X; \Omega^p\otimes_{\mathscr{O}}\mathscr{F})$; это сильное сопряженное к некоторому пространству Фреше и Шварца (см. ([2])).

2. Пусть $\mathscr{D}^{p,q}$ — пучок ростков потоков двойной степени (p, q) на X. При фиксированном p рассмотрим комплекс $\operatorname{Hom}_{\mathscr{O}}(X; \mathscr{F}, \mathscr{D}^{p,*})$ векторных пространств $\operatorname{Hom}_{\mathscr{O}}(X; \mathscr{F}, \mathscr{D}^{p,q}) = \Gamma(X; \mathscr{H}om_{\mathscr{O}}(\mathscr{F}, \mathscr{D}^{p,q}))$ с кограничным оператором

$$d'': \operatorname{Hom}_{\mathscr{O}}(X; \mathscr{F}, \mathscr{D}^{p,q}) \to \operatorname{Hom}_{\mathscr{O}}(X; \mathscr{F}, \mathscr{D}^{p,q+1}),$$

индуцированным внешним дифференциалом $d'': \mathscr{D}^{p,q}\to\mathscr{D}^{p,q+1}$. Если $\mathscr{L}^*$ — инъективная резольвента пучка Ω^p, то векторные пространства когомологий $H^q\operatorname{Hom}_{\mathscr{O}}(X; \mathscr{F}, \mathscr{D}^{p,*})$ и $H^q\operatorname{Hom}_{\mathscr{O}}(X; \mathscr{F}, \mathscr{L}^*) = \operatorname{Ext}^q_{\mathscr{O}}(X; \mathscr{F}, \Omega^p)$ канонически изоморфны ср. ([1])).

Над достаточно малым открытым множеством $U\subset X$ эпиморфизм $\pi: \mathscr{O}^m\to\mathscr{F}$ определяет мономорфизм пучков $\mathscr{H}om_{\mathscr{O}}(\mathscr{F}, \mathscr{D}^{p,q})\to(\mathscr{D}^{p,q})^m$. Тем самым векторное пространство $\operatorname{Hom}_{\mathscr{O}}(U; \mathscr{F}, \mathscr{D}^{p,q})$ можно отождествить с подпространством в $\Gamma(U; (\mathscr{D}^{p,q})^m)$. Наделим $\operatorname{Hom}_{\mathscr{O}}(U; \mathscr{F}, \mathscr{D}^{p,q})$ топологией, индуцируемой обычной топологией пространства $\Gamma(U; (\mathscr{D}^{p,q})^m)$; на самом деле эта топология не зависит от выбора эпиморфизма π.

Пусть $\mathfrak{U}$ — достаточно мелкое, локально конечное открытое покрытие многообразия X. Пространство $\operatorname{Hom}_{\mathscr{O}}(X; \mathscr{F}, \mathscr{D}^{p,q})$ наделим слабейшей из топологий, для которых непрерывны отображения сужения $\operatorname{Hom}_{\mathscr{O}}(X, \mathscr{F}, \mathscr{D}^{p,q})\to\operatorname{Hom}_{\mathscr{O}}(U; \mathscr{F}, \mathscr{D}^{p,q})$ $(U\in\mathfrak{U})$; эта топология не зависит от выбора покрытия $\mathfrak{U}$.

Векторное пространство когомологий $H^q\operatorname{Hom}_{\mathscr{O}}(X; \mathscr{F}, \mathscr{D}^{p,*})$ наделим топологией фактор-пространства $\operatorname{Ker} d''/\operatorname{Im} d''$; пространство $\operatorname{Ext}^q_{\mathscr{O}}(X, \mathscr{F}, \Omega^p)$ наделим топологией, индуцируемой из $H^q\operatorname{Hom}_{\mathscr{O}}(X; \mathscr{F}, \mathscr{D}^{p,*})$ при каноническом изоморфизме этих пространств. Через $\widetilde{\operatorname{Ext}}^q_{\mathscr{O}}(X; \mathscr{F}, \Omega^p)$ будем обозначать отделимое локально выпуклое пространство, ассоциированное с $\operatorname{Ext}^q_{\mathscr{O}}(X; \mathscr{F}, \Omega^p)$.

3. Основным результатом настоящей работы является

Теорема. *При каждом $q = 0, 1, \ldots, n$ топологическое векторное пространство $\widetilde{\operatorname{Ext}}^{n-q}_{\mathscr{O}}(X; \mathscr{F}, \Omega^{n-p})$, где n — комплексная размерность многообразия X, канонически отождествимо с сильным сопряженным к топологическому векторному пространству $\tilde{H}_c^q(X; \Omega^p\otimes_{\mathscr{O}}\mathscr{F})$.*

Действительно, прежде всего можно показать, что пространство $\operatorname{Hom}_{\mathscr{O}}(X; \mathscr{F}, \mathscr{D}^{n-p,n-q})$ канонически отождествимо с сильным сопряженным к пространству $\Gamma_c(X; \mathscr{E}^{p,q}\otimes_{\mathscr{O}}\mathscr{F})$ (ср. ([1])). Отсюда получаем алгебраический изоморфизм векторных пространств $\{\tilde{H}_c^q(X; \Omega^p\otimes_{\mathscr{O}}\mathscr{F})\}'$ и $\widetilde{\operatorname{Ext}}_{\mathscr{O}}^{n-q}(X; \mathscr{F}, \Omega^{n-p})$ (ср. ([1])). Для завершения доказательства достаточно показать, что каждое ограниченное множество в $\tilde{H}_c^q(X; \Omega_p\otimes_{\mathscr{O}}\mathscr{F}) = Z_c(X; \mathscr{E}^{p,q}\otimes_{\mathscr{O}}\mathscr{F})\,/\,\overline{d''\Gamma_c(X; \mathscr{E}^{p,q+1}\otimes_{\mathscr{O}}\mathscr{F})}$ является каноническим образом некоторого ограниченного множества из пространства $Z_c(X; \mathscr{E}^{p,q}\otimes_{\mathscr{O}}\mathscr{F})$. Детали этого доказательства мы опускаем.

В частности, получаем, что $\widetilde{\operatorname{Ext}}^q_{\mathscr{O}}(X; \mathscr{F}, \Omega^p)$ есть пространство Фреше и Шварца.

Следующий результат является уточнением теоремы двойственности Ж.-П. Серра ([3]).

Следствие 1. *Пусть пучок $\mathscr{F}$ локально свободен.*

Тогда топологическое векторное пространство $\tilde{H}^{n-q}(X; \mathscr{H}om_{\mathscr{O}}(\mathscr{F}, \Omega^{n-p}))$ канонически отождествимо с сильным сопряженным к топологическому векторному пространству $\tilde{H}_{cq}(X; \Omega_{\mathscr{O}}\mathscr{F})$.

Действительно, для этого достаточно, чтобы каноническое непрерывное линейное отображение пространства $\widetilde{H}^{n-q}(X;\ \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{F},\ \Omega^{n-p}))$ на $\widetilde{\operatorname{Ext}}_{\mathcal{O}}^{n-q}(X,\ \mathcal{F},\ \Omega^{n-p})$ было инъективным. Последнее следует из того, что сопряженное отображение

$$\widetilde{H}_c^q(X;\ \Omega^p \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{F}) \to \widetilde{\operatorname{Ext}}_{\mathcal{O},\, c}^q(X;\ \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{F},\ \Omega^{n-p}),\ \Omega^n)$$

сюръективно, ибо пучок $\Omega^p \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{F}$ канонически изоморфен пучку $\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{F},\ \Omega^{n-p}),\ \Omega^n)$.

Следствие 2. *Если пучок* $\mathcal{F}$ *локально свободен, то канонические биективные отображения*

$$H^q(X;\ \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{F},\ \Omega^p)) \to \operatorname{Ext}_{\mathcal{O}}^q(X;\ \mathcal{F},\ \Omega^p),$$

$$H_c^q(X;\ \mathcal{H}om_{\mathcal{O}}(\mathcal{F},\ \Omega^p)) \to \operatorname{Ext}_{\mathcal{O},\, c}^q(X;\ \mathcal{F},\ \Omega^p).$$

являются изоморфизмами топологических векторных пространств (ср. [4]).

Следствие 3. *Если многообразие X голоморфно полно, то топологическое векторное пространство* $\operatorname{Ext}_{\mathcal{O}}^{n-q}(X;\ \mathcal{F},\ \Omega^{n-p})$ *канонически отождествимо с сильным сопряженным к топологическому векторному пространству* $H_c^q(X;\ \Omega_p \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{F})$ (ср. [5]).

4. Теорема двойственности для когомологий с компактными носителями может быть применена, например, в следующей ситуации.

Пусть S — носитель когерентного аналитического пучка $\mathcal{F}$, т. е. множество тех $x \in X$, для которых $\mathcal{F}_x \neq 0$. Тогда векторные пространства $H_c^q(X;\ \Omega^{n-p} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{F})$ и $H_c^q(S;\ \Omega^{n-p} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{F})$ канонически изоморфны. С другой стороны, пусть d — комплексная размерность аналитического множества S. Тогда $H_c^q(S;\ \Omega^{n-p} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{F}) = 0$ при $q \geqslant d+1$. Отсюда, в силу теоремы двойственности, получаем

$$\operatorname{Ext}_{\mathcal{O}}^{n-q}(X;\ \mathcal{F},\ \Omega^p) = 0$$

при $q \geqslant d+1$.

Действительно, отображения

$$d'':\ \Gamma_c(X;\ \mathcal{E}^{n-p,\, q} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{F}) \to \Gamma_c(X;\ \mathcal{E}^{n-p,\, q+1} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{F})$$

при $q \geqslant d$ являются гомоморфизмами топологических векторных пространств (см. [2]) и, следовательно, пространства $\operatorname{Ext}_{\mathcal{O}}^{n-q}(X;\ \mathcal{F},\ \Omega^p)$ при $q \geqslant d$ отделимы.

Вместо X можно взять любую открытую окрестность U произвольной точки. Переходя к индуктивному пределу по фильтрующемуся множеству всех таких окрестностей, получаем результат Г. Кернера [6]:

$$\mathcal{E}xt_{\mathcal{O}}^{n-q}(\mathcal{F},\ \Omega^p) = 0$$

при $q \geqslant d+1$.

Харьковский государственный университет
им. А. М. Горького

Поступило
14 I 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Д. Головин, Функц. анализ и его прилож., 4, № 1, 33 (1970). [2] В. Д. Головин, Теория функций, функц. анализ и их прилож., 15 (1971). [3] J.-P. Serre, Comm. Math. Helv., 29, № 1, 9 (1955). [4] H.-B. Laufer, Trans. Am. Math. Soc., 128, № 3, 414 (1967). [5] C. Bănică, O. Stănăşilă, C. R. 269, № 15, A636 (1969). [6] H. Kerner, Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss., 41 (1966).