Доклады Академии наук СССР
1971. Том 199, № 4

УДК 517.946 *МАТЕМАТИКА*

П. Т. ДЫБОВ

РАЗРЕШИМОСТЬ УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА 4-го ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ В КЛАССЕ ФУНКЦИЙ С ОГРАНИЧЕНИЕМ НА РОСТ В БЕСКОНЕЧНОСТИ

(Представлено академиком И. Н. Векуа 5 II 1971)

В работе изучается разрешимость общего уравнения эллиптического типа 4-го порядка на плоскости в классе функций, растущих не быстрее $|z|^2 \lg |z|$ на бесконечности. Исследование ведется методом, предложенным И. Н. Векуа [1]. Он состоит в том, что поставленная задача сводится к эквивалентному сингулярному интегральному уравнению по области, а затем исследуется разрешимость этого уравнения.

На плоскости (x, y) рассматривается уравнение эллиптического типа

$$Lu \equiv L_0 u + L_1 u = f, \tag{1}$$

$$L_0 u \equiv a\, \partial^4 u / \partial x^4 + b\, \partial^4 u / (\partial x^3 \partial y) + c\, \partial^4 u / (\partial x^2 \partial y^2) + + d\, \partial^4 u / (\partial x \partial y^3) + e\, \partial^4 u / \partial y^4,$$

$$L_1 u \equiv \sum_{i+j=0}^{3} a_{ij}\, \partial^{i+j} u / (\partial x^i \partial y^j),$$

где коэффициенты a, b, c, d, e — измеримые ограниченные функции, удовлетворяющие почти всюду на плоскости условию равномерной эллиптичности

$$at^4 + bt^3 + ct^2 + dt + e > \Delta_0 > 0, \quad a > 0, \quad -\infty < t < +\infty \tag{2}$$
$$(\Delta_0 = \text{const}).$$

Кроме того, мы считаем, что вне круга Γ: $x^2 + y^2 < R^2$ достаточно большого радиуса R оператор L_0 имеет вид $L_0 = \Delta^2$, где Δ — лапласиан. Коэффициенты a_{ij} $(0 \leqslant i + j \leqslant 3)$, а также свободный член f мы предполагаем суммируемыми со степенью $p > 2$ по Γ и равными нулю вне Γ, иначе $a_{ij}, f \in L_p{}^0(E)$, $p > 2$ (т. е. $Lu = \Delta^2 u = 0$ для $(x, y) \overline{\in} \Gamma$).

Вводя комплексные производные $\partial_z = {}^1/_2(\partial_x - i\partial_y)$, $\partial_{\bar z} = {}^1/_2(\partial_x + i\partial_y)$, $z = x + iy$, запишем уравнение (1) в форме

$$Lu \equiv C \frac{\partial^4 u}{\partial z^2 \partial \bar z^2} + \operatorname{Re}\left\{ A \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + B \frac{\partial^4 u}{\partial z^3 \partial \bar z} \right\} + \sum_{i+j=0}^{3} A_{ij} \frac{\partial^{i+j} u}{\partial z^i \partial \bar z^j} = f, \tag{1'}$$

где $A = 2(a - c + e) + 2(b - d)i$, $B = 8(a - e) + 4(b + d)i$, $C = 6a + 2c + 6e$, при этом вне Γ $A \equiv B \equiv A_{ij} \equiv f \equiv 0$. Плоскость переменного z будем обозначать через E. Из неравенства (2) следует, что $C > 2\Delta_0 > 0$, поэтому уравнение (1) можно разделить на C и в дальнейшем полагать коэффициент при $\partial^4 u / (\partial z^2 \partial \bar z^2)$ равным 1.

Будем говорить, что $u(x, y)$ есть решение задачи для уравнения (1) на плоскости, если

I) $u(x, y)$ имеет непрерывные производные до третьего порядка, производные четвертого порядка существуют в смысле С. Л. Соболева [2], причем $D^4 u \in L_p(E)$, $p > 2$;

II) на бесконечности $u(x, y)$ растет не быстрее $M|z|^2 \lg |z|$ $(M = \text{const})$;

III) $u(x, y)$ почти везде на плоскости удовлетворяет уравнению (1).

Решение поставленной задачи будем искать в виде

$$u(x, y) = \iint\limits_E \sigma(z, \zeta)\rho(\zeta)\,dE_\zeta + \mathscr{P}(x, y) \equiv S_0\rho + \mathscr{P}, \tag{3}$$

$$\sigma(z, \zeta) = \frac{1}{\pi}|\zeta - z|^2 \lg|\zeta - z|^2,$$

где $\rho(\zeta)$ — вещественная функция переменных ξ, η $(\zeta = \xi + i\eta)$, $\mathscr{P}$ — произвольный полином второго порядка.

Теорема 1. *Если функция $u(x, y)$ удовлетворяет условиям I, II и кроме того $\partial^4 u / (\partial z^2 \partial \bar{z}^2) \in L_p^0(E)$, то ее можно представить в виде* (3).

Доказательство. Пусть $u(x, y)$ — произвольная функция, удовлетворяющая всем условиям теоремы. Поскольку для $\rho \in L_p^0(E)$, $p > 2$, ${}^1/_{16}\Delta^2 S_0\rho \equiv \partial^4 S_0\rho / (\partial z^2 \partial \bar{z}^2) = \rho$, то, положив $\rho = \partial^4 u / (\partial z^2 \partial \bar{z}^2)$, получим $\Delta^2(u - S_0\rho) = 0$, следовательно, $u - S_0\rho = u_0$, где $u_0(x, y)$ — бигармоническая функция на плоскости, растущая на бесконечности не быстрее $M|z|^2 \lg|z|$. Отсюда следует, что $u_0(x, y)$ может быть лишь полиномом не выше второго порядка.

Если $\rho \in L_p^0(E)$, $p > 2$, то функции

$$g_{ij}(z) = \frac{\partial^{i+j} S_0\rho}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} = \iint\limits_E \frac{\partial^{i+j}\sigma(z, \zeta)}{\partial z^i \partial \bar{z}^j}\rho(\zeta)\,dE_\zeta \equiv S_{ij}\rho \quad (0 \leqslant i + j \leqslant 3) \tag{4}$$

непрерывны на плоскости, причем $g_{ij}(z) \in \operatorname{Lip}\alpha$, $\alpha = (p - 2)/p$ при $i + j = 3$. Существуют производные четвертого порядка от $S_0\rho$ по С. Л. Соболеву, которые вычисляются по формулам

$$\frac{\partial^4 S_0\rho}{\partial z^2 \partial \bar{z}^2} = \rho, \quad \frac{\partial^4 S_0\rho}{\partial z^3 \partial \bar{z}} = \iint\limits_E \frac{\partial^4 \sigma(z, \zeta)}{\partial z^3 \partial \bar{z}}\rho(\zeta)\,dE_\zeta = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_E \frac{\rho(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\,dE_\zeta \equiv \Pi\rho,$$

$$\frac{\partial^4 S_0\rho}{\partial z^4} = \iint\limits_E \frac{\partial^4 \sigma(z, \zeta)}{\partial z^4}\rho(\zeta)\,dE_\zeta = \frac{2}{\pi}\iint\limits_E \frac{\bar{\zeta} - \bar{z}}{(\zeta - z)^3}\rho(\zeta)\,dE_\zeta \equiv S_{40}\rho, \tag{5}$$

где интегралы следует понимать в смысле главного значения по Коши. При этом $S_{40}\rho \equiv \Pi\Pi\rho$ [3]. Из неравенства А. Зигмунда и А. Кельдерона [4a, 5] следует, что для любого $p > 1$

$$\|\Pi\rho\|_{L_p(E)} \leqslant \lambda_p \|\rho\|_{L_p(E)}, \quad \|S_{40}\rho\|_{L_p(E)} \leqslant \mu_p \|\rho\|_{L_p(E)}.$$

Заменяя в уравнении (1′) функцию u и ее производные с помощью (3), (4), (5), для ρ получаем уравнение

$$\rho - P\rho = F, \tag{6}$$

где $P\rho \equiv P_0\rho + T\rho$, $P_0\rho \equiv -\operatorname{Re}[A\Pi\Pi\rho + B\Pi\rho]$, $T\rho \equiv -\sum\limits_{i+j=0}^{3} A_{ij}S_{ij}\rho$, $F \equiv f - L\mathscr{P}$. Для значений $|z| > R$ $P_0\rho \equiv T\rho \equiv F \equiv 0$, следовательно, $\rho \equiv 0$.

Для любого $p > 1$

$$\Big(\iint\limits_E |P_0\rho|^p\,dx\,dy\Big)^{1/p} \leqslant \Big(\iint\limits_E |A\Pi\Pi\rho|^p\,dx\,dy\Big)^{1/p} + \Big(\iint\limits_E |B\Pi\rho|^p\,dx\,dy\Big)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \operatorname*{vrai\,sup}_{z \in E}\Big\{|A|\Big(\iint\limits_E |\Pi\Pi\rho|^p\,dx\,dy\Big)^{1/p} + |B|\Big(\iint\limits_E |\Pi\rho|^p\,dx\,dy\Big)^{1/p}\Big\} \leqslant$$

$$\leqslant \operatorname*{vrai\,sup}_{z \in E}(|A|\mu_p + |B|\lambda_p)\|\rho\|_{L_p(E)},$$

т. е.

$$\|P_0\rho\|_{L_p(E)} \leqslant \operatorname*{vrai\,sup}_{z \in E}(|A|\mu_p + |B|\lambda_p)\|\rho\|_{L_p(E)}. \tag{7}$$

Следовательно, $P_0\rho$ — линейный ограниченный оператор в $L_p(E)$, $p > 1$, переводящий это пространство в себя, $P_0\rho$: $L_p^0(E) \to L_p^0(E)$. Далее, пусть $\rho \in L_p^0(E)$, $p > 2$, тогда

$$\Big(\iint\limits_E |A_{ij}S_{ij}\rho|^p\,dx\,dy\Big)^{1/p} = \Big(\iint\limits_\Gamma |A_{ij}S_{ij}\rho|^p\,dx\,dy\Big)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \Big(\sup_{z\in\Gamma}|S_{ij}\rho|^p \iint\limits_\Gamma |A_{ij}|^p\,dx\,dy\Big)^{1/p} \leqslant N_{ij}\|A_{ij}\|_{L_p^0(E)}\|\rho\|_{L_p^0(E)}, \tag{8}$$

$$\sup_{z\in\Gamma}|S_{ij}\rho| \leqslant N_{ij}\|\rho\|_{L_p^0(E)}, \quad N_{ij} = N_{ij}(R, p).$$

Учитывая, кроме того, свойства операторов $S_{ij}\rho$ $(0 \leqslant i + j \leqslant 3)$ приходим к выводу, что $T\rho$ — вполне непрерывный оператор в $L_p^0(E)$, $p > 2$.

Пусть ρ_1, ρ_2 — любые два элемента из $L_p^0(E)$, $p > 2$. На основании (7), (8) справедливо неравенство

$$\|P\rho_1 - P\rho_2\|_{L_p^0(E)} \leqslant q\|\rho_1 - \rho_2\|_{L_p^0(E)},$$

$$q = \operatorname{vrai}\sup_{z\in\Gamma}(|A|\mu_p + |B|\lambda_p) + \sum_{i+j=0}^{3} N_{ij}\|A_{ij}\|_{L_p^0(E)}. \tag{9}$$

Если $q < 1$, то применим принцип сжатых отображений. Тогда однородное уравнение (6) $(F \equiv 0)$ не имеет решения, отличного от нуля, а неоднородное уравнение (6) имеет единственное решение $\rho \in L_p^0(E)$, $p > 2$. Отсюда следует

Теорема 2. *Если коэффициенты уравнения* (1) *удовлетворяют условию* (2) *и неравенству* $q < 1$, *то поставленная задача разрешима для любой функции* $f \in L_p^0(E)$, $p > 2$, *причем решение представимо в виде* (3), *где* $S_0\rho$ — *частное решение неоднородного уравнения* $Lu = f$ (ρ — *решение уравнения* $\rho - P\rho = f$), *а* $\mathscr{P}$ — *полином не выше второго порядка, удовлетворяющий уравнению* $Lu = 0$ (*может случиться, что* $\mathscr{P} \equiv 0$), *при этом, если* $a_{ij} \equiv 0$ *для всех* $0 \leqslant i + j \leqslant 2$, *то* $\mathscr{P}$ — *произвольный полином второго порядка.*

Рассмотрим более общее уравнение, не подчиняя коэффициенты при младших производных неравенству $q < 1$, а считая их произвольными функциями из $L_p^0(E)$, $p > 2$. Поскольку нормы λ_p, μ_p операторов П, ПП непрерывно зависят от p [6] и $\lambda_2 = 1$ [7], а следовательно, и $\mu_2 = 1$, то для значений p, близких к двум, λ_p и μ_p близки к единице. Если коэффициенты A, B удовлетворяют неравенству

$$\operatorname{vrai}\sup(|A| + |B|) < 1, \tag{10}$$

то найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $\|P_0\|_{L_{p0}(E)} < 1$ для значений p, удовлетворяющих неравенству $2 < p < 2 + \varepsilon$. В этом случае оператор $I - P_0$ имеет обратный $P_* = (I - P_0)^{-1}$, который также линеен и ограничен [5] в $L_p^0(E)$, $2 < p < 2 + \varepsilon$. Применив оператор P_* к уравнению (6), приводим его к равносильному функциональному уравнению $\rho - T_*\rho = P_*F$ с вполне непрерывным [8] оператором $T_* = P_*T$, для которого справедливы теоремы Фредгольма [8, 9]. Пусть $f_1 \ldots, f_m$ — функционалы, являющиеся решениями однородного сопряженного уравнения. Тогда для разрешимости уравнения (6) необходимо и достаточно выполнение соотношений

$$f_k(f - L\mathscr{P}) = 0, \quad k = 1, \ldots, m. \tag{11}$$

Так как уравнение $\rho - P\rho = -L\mathscr{P}$ всегда разрешимо, то $f_k(L\mathscr{P}) = 0$, поэтому условия (11) равносильны условиям

$$f_k(f) = 0, \quad k = 1, \ldots, m, \tag{12}$$

где m — число линейно независимых решений уравнения $\rho - P\rho = 0$.

Если в формуле (3) взять два разных полинома, то получим два разных решения, разность которых будет решением уравнения $Lu = 0$. Поэтому, по существу, они будут отличаться лишь на полином не выше второго порядка.

Теорема 3. *Если коэффициенты $L_0 u$ почти всюду удовлетворяют неравенству* (3) *и неравенству* (10), *то найдется $\varepsilon > 0$ такое, что для значений p, $2 < p < 2 + \varepsilon$, рассматриваемая задача разрешима тогда, когда f удовлетворяет условиям* (12), *где m — число линейно независимых решений уравнения $\rho - P\rho = 0$. Решение задачи можно искать в виде* (3), *где $\mathscr{P}$ — полином не выше второго порядка, удовлетворяющий уравнению $Lu = 0$.*

Сделанные выводы о разрешимости задачи опираются на неравенство $\|P_0\|_{L_p^0(E)} < 1$. Однако из условия (2) не следует выполнение этого неравенства. Построен пример равномерно эллиптического уравнения 4-го порядка, для которого $\|P_0\|_{L_p^0(E)} > 1$. При этом в качестве ρ рассматривалась функция

$$\rho = \begin{cases} z^3\bar{z} + \bar{z}^3 z & \text{при } |z| < 1, \\ 0 & \text{при } |z| > 1. \end{cases}$$

Далее коэффициенты $L_0 u$ считаем функциями непрерывными. Рассматриваем символ Φ сингулярного интегрального уравнения (6). Доказываем, что $\inf \Phi > 0$ на плоскости. Поэтому согласно теории С. Г. Михлина ([9]) сингулярное интегральное уравнение (6) в этом случае допускает эквивалентную регуляризацию.

Теорема 4. *Если коэффициенты $L_0 u$ — функции непрерывные и удовлетворяют условию* (2); *$a_{ij}, f \in L_p^0(E)$, $p > 2$, то рассматриваемая задача разрешима, когда f удовлетворяет условиям* (12), *где m — число линейно независимых решений уравнения $\rho - P\rho = 0$. Решение можно представить в виде* (3), *где $\mathscr{P}$ — полином не выше второго порядка, являющийся решением уравнения $Lu = 0$.*

Приношу глубокую благодарность акад. И. Н. Векуа за постановку задачи и внимание к работе.

Московский инженерно-физический институт

Поступило 12 XII 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Н. Векуа, ДАН, 101, № 4 593 (1955). [2] С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, ЛГУ, 1950. [3] F. Tricomi, Math., Zs., 27, 87 (1928). [4] A. Calderon, A. Zygmund, a) Acta Math., 88, 85 (1952); б) Am. J. Math., 78, 289 (1956). [5] Ф. Хаусдорф, Теория множеств, М.—Л., 1937. [6] M. Riesz, Acta Math., 49, 465 (1926). [7] И. Н. Векуа, Обобщенные аналитические функции, М., 1959. [8] Ф. Рисс, УМН, в. 1, 175 (1936). [9] J. Schauder, Studia Math., 11, 183 (1930). [10] С. Г. Михлин, Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения, М., 1962. [11] П. Т. Дыбов, Сборн. научн. работ кафедры высшей математики, в. 2, М., 1962, стр. 3.