Доклады Академии наук СССР
1971. Том 199, № 4

УДК 517.948.32:517.544

МАТЕМАТИКА

Э. И. ЗВЕРОВИЧ

О КОНСТРУКТИВНОМ РЕШЕНИИ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ РИМАНА НА ГИПЕРЭЛЛИПТИЧЕСКИХ РИМАНОВЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

(Представлено академиком П. Я. Кочиной 12 II 1971)

Пусть $\mathfrak{R}$ — гиперэллиптическая двулистная замкнутая риманова поверхность рода h, заданная алгебраическим уравнением

$$w^2 = \prod_{k=1}^{2h+2} (z - r_k). \tag{1}$$

Запись $(z, w) \in \mathfrak{R}$ будет означать, что числа z и w связаны уравнением (1). Символами $(\infty, +\infty)$, $(\infty, -\infty)$ обозначим бесконечно удаленные точки поверхности $\mathfrak{R}$. Используя терминологию работы [3], поставим краевую задачу Римана на $\mathfrak{R}$. Пусть на $\mathfrak{R}$ задан сложный кусочно-гладкий контур L, на котором задан дивизор $\mathcal{J}$ порядка m и кусочно-H-непрерывные функции $G(t, v) \neq 0$, $g(t, v)$, $\mathcal{J}^{-1} \wr (g)$, $(t, v) \in L$. На $\mathfrak{R} - L$ задан дивизор $\mathcal{D}$ порядка n.

Найти все функции $\Phi(z, w)$, мероморфные на $\mathfrak{R} - L$, кратные там дивизору D^{-1}, H-непрерывно продолжимые на все (кроме конечного числа) точки контура L, где должно выполняться краевое условие

$$\Phi^+(t, v) = G(t, v)\Phi^-(t, v) + g(t, v), \quad \mathcal{J}^{-1}\mathcal{D}^{-1} \quad (\Phi) \wr (t, v) \in L, \tag{2}$$

В окрестности всех точек контура L, где краевое условие (2) *не задано или не имеет смысла, поведение искомых функций определяется требованием: $\Phi(z, w)$ псевдократны дивизору $\mathcal{J}^{-1}$* (т. е. $\mathcal{J}^{-1} \wr (\Phi)$).

Частные случаи этой задачи на поверхности (1) при $h = 1$ и $h = 2$ изучены в [1, 2]. В более общей постановке (на абстрактных римановых поверхностях любого рода) задача (2) изучена в [3], где построено ее общее решение и дана полная картина разрешимости. Общее решение задачи (2) выражено в явном виде через 1) мероморфные всюду на $\mathfrak{R}$ функции и абелевы дифференциалы, кратные наперед заданному дивизору; 2) нормированный базис абелевых интегралов 1 рода; 3) частное решение проблемы обращения Якоби; 4) «разрывный» и «мероморфный» аналоги ядра Коши. На абстрактных римановых поверхностях для всех этих объектов известны лишь теоремы существования [3-5]. Ввиду большого прикладного значения задачи (2) на поверхности (1) представляет интерес вопрос о конструктивном построении общего решения задачи (2) непосредстенно в терминах переменных z и w, связанных уравнением (1). Ниже даются алгоритмы конструктивного построения входящих в общее решение задачи (2) объектов 1) — 4) на поверхности (1).

1°. Пусть Δ — заданный на $\mathfrak{R}$ дивизор. Мероморфная всюду на $\mathfrak{R}$ функция $\varphi(z, w)$ кратная дивизору Δ^{-1}, как известно [7], рационально выражается через z и w:

$$\varphi(z, w) = (P(z)w + Q(z)) \Big/ \prod_k (z - \tau_k), \quad (z, w) \in \mathfrak{R}, \tag{3}$$

где $P(z)$, $Q(z)$ — некоторые многочлены от z, а произведение биномов $(z - \tau_k)$ распространяется на все конечные точки (τ_k, ζ_k) или $(\tau_k, -\zeta_k)$, входящие в знаменатель дивизора Δ^{-1}. Каждый бином $(z - \tau_k)$ повторяется сомножителем число раз, равное сумме кратностей, с которыми точки

(τ_h, ζ_h) и $(\tau_h, -\zeta_h)$ входят в знаменатель представленного в несократимом виде дивизора Δ^{-1}. Ограничение на степень многочлена $Q(z)$ находится, исходя из максимально допустимого порядка роста функции $\varphi(z, w)$ при $z \to \infty$, т. е. в зависимости от кратностей, с которыми точки $(\infty, +\infty)$, $(\infty, -\infty)$ входят в дивизор Δ^{-1}. Учитывая, что $w = O(z^{h+1})$ при $z \to \infty$, получаем, что либо $P(z) \equiv 0$, либо степень $P(z)$ на $h+1$ меньше степени многочлена $Q(z)$. Определив таким образом границы степеней многочленов $P(z)$ и $Q(z)$, можно выразить остальные условия, обеспечивающие кратность функции $\varphi(z, w)$ дивизору Δ^{-1}, в виде системы уравнений, линейных относительно неопределенных коэффициентов многочленов $P(z)$ и $Q(z)$. Аналогично строится абелев дифференциал $d\psi(z, w)$, кратный дивизору Δ:

$$d\psi(z, w) = \frac{P_1(z)\, w + Q_1(z)}{\prod\limits_k (z - \tau_k')}\, dz,$$

где $P_1(z)$ и $Q_1(z)$ — некоторые многочлены от z, а произведение биномов $(z - \tau_k')$ распространяется на все конечные точки $(\tau_k', \pm\zeta_k')$, входящие в знаменатель дивизора Δ.

2°. Как известно ([4,7]), дифференциалы

$$dz / w, \quad z\, dz / w, \ldots, z^{h-1} dz / w, \quad (z, w) \in \Re, \tag{4}$$

образуют базис абелевых дифференциалов 1 рода на $\Re$. Чтобы его нормировать, выбираем систему канонических сечений $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_h, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_h$ так, как указано на рис. 1.

Отметим, что взаимное расположение на $\Re$ канонических сечений и контура L задачи (2) может быть любым. Нормированный базис абелевых дифференциалов I рода на $\Re$ вычисляется по формулам

$$du_k(z, w) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & dz/w & \ldots & z^{h-1}\, dz/w \\ -\delta_{k1} & \int\limits_{\mathbf{a}_1} dz/w & \ldots & \int\limits_{\mathbf{a}_1} z^{h-1}\, dz/w \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\delta_{kh} & \int\limits_{\mathbf{a}_h} dz/w & \ldots & \int\limits_{\mathbf{a}_h} z^{h-1}\, dz/w \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \int\limits_{\mathbf{a}_1} dz/w & \ldots & \int\limits_{\mathbf{a}_1} z^{h-1}\, dz/w \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \int\limits_{\mathbf{a}_h} dz/w & \ldots & \int\limits_{\mathbf{a}_h} z^{h-1}\, dz/w \end{vmatrix}}, \quad (k = 1, 2, \ldots, h), \tag{5}$$

где δ_{kj} — символ Кронекера. Свойство нормированности базиса (5)

$$\int\limits_{\mathbf{a}_k} du_j(z, w) = \delta_{kj} \quad (k, j = 1, 2, \ldots, h) \tag{6}$$

проверяется непосредственно.

3°. Обозначим через $u_\nu(z, w)$, $\nu = 1, 2, \ldots, h$, нормированный базис абелевых интегралов 1 рода с фиксированным нижним пределом $(\tilde{z}, \tilde{w}) \in \Re$, рассмотрим вопрос о конструктивном построении частного решения проблемы обращения Якоби ([6,7]) на $\Re$:

$$\sum_{\mu=1}^{h} u_\nu(z_\mu, w_\mu) \equiv e_\nu - k_\nu \text{ (по модулю периодов)}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, h, \tag{7}$$

где e_ν — заданные числа, а k_ν — римановы константы ([6,7]), вычисляемые в гиперэллиптическом случае по формулам ([6,7])

$$k_\nu = \sum_{\mu=1}^{h} B_{\mu\nu} - \frac{\nu}{2}, \quad B_{\mu\nu} = \int\limits_{\mathbf{b}_\mu} du_\nu(z, w).$$

Построим θ-функцию Римана $\theta(u_\nu(z, w) - e_\nu)$, соответствующую проблеме (7). Через s обозначим наименьший порядок отличной от тождественного нуля частотной производной от функции $\theta(u_\nu(z, w) - e_\nu)$ по переменным u_μ. Через $\theta^{(s)}(u_\nu(z, w) - e_\nu)$ обозначим любую из отличных от тождественного нуля частных производных порядка s. Пары точек поверхности $\mathfrak{R}$ вида (z, w), $(z, -w)$ будем называть сопряженными парами.

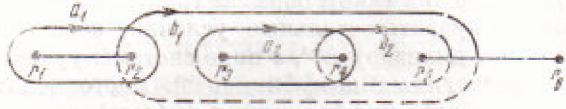

Рис. 1

Справедливы следующие утверждения.

Функция $\theta^{(s)}(u_\nu(z, w) - e_\nu)$ имеет на $\mathfrak{R}$ точно h нулей (с учетом кратностей). Эти нули образуют решение проблемы обращения (7). В случае $s = 0$ решение проблемы обращения единственно. В случае $s > 0$ проблема (7) имеет бесконечное множество решений, и каждое решение содержит точно s сопряженных пар точек (с учетом кратностей). Если задать на $\mathfrak{R}$ произвольно s сопряженных пар точек, то однозначно определяется совокупность $(h - 2s)$ точек, не содержащая сопряженных пар и такая, что вся совокупность h точек образует решение проблемы обращения Якоби.

Число s находится на основании вычисления суммы θ-ряда и его производных в ограниченном числе точек. Функция $\theta^{(s)}(u_\nu(z, w) - e_\nu)$ строится конструктивно в виде быстро сходящегося функционального ряда. Таким образом, вопрос о построении частного решения проблемы (7) сводится к вопросу о вычислении нулей функции $\theta^{(s)}(u_\nu(z, w) - e_\nu)$, аналитической всюду на $\mathfrak{R}$, кроме линий разрыва 1 рода $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_h$, на которых выполняется краевое условие

$$[\theta^{(s)}(u_\nu(t, v) - e_\nu)]^+ = [\theta^{(s)}(u_\nu(t, v) - e_\nu)]^- \exp\{\pi i B_{jj} + 2\pi i(u_j(t, v) - e_j)\},$$
$$(t, v) \in \mathbf{a}_j, \quad j = 1, 2, \ldots, h.$$

Исходя из этого краевого условия, легко показать, что если все точки $(z_1, w_1), (z_2, w_2), \ldots, (z_h, w_h)$, образующие решение проблемы (7), конечны, то их можно найти, решая относительно $z_1, z_2, \ldots, z_h$ следующую симметричную систему алгебраических уравнений:

$$\sum_{\nu=1}^{h} z_\nu^j = \sum_{\nu=1}^{h} \int_{\mathbf{a}_\nu} t^j du_\nu(t, v) - \sum_{t=\infty} \text{вычетов } \{t^j d \ln \theta^{(s)}\} \quad (j = 1, 2, \ldots, h),$$

правые части которых выражены через известные функции.

4°. Рассмотрим изученное в ([1], [2]) выражение

$$\frac{w + \zeta}{2\zeta} \frac{d\tau}{\tau - z}, \quad (z, w) \in \mathbf{R}, \quad (\tau, \zeta) \in \mathbf{R}, \tag{8}$$

являющееся по переменной (τ, ζ) абелевым дифференциалом 3 рода с простым полюсом при $(\tau, \zeta) = (z, w)$ с вычетом $+1$. Это последнее свойство позволяет использовать выражение (8) в качестве одного из аналогов ядра Коши на $\mathfrak{R}$. В точках $(\tau, \zeta) = (\infty, \pm\infty)$ ядро (8) имеет простые полюсы с вычетами $(-1/2)$. По переменной (z, w) функция (8) имеет в точках $(\infty, \pm\infty)$ h-кратные полюсы. Коэффициенты при положительных степенях z разложения выражения (8) в окрестности каждой из точек $(z, w) = (\infty, \pm\infty)$ образуют по (τ, ζ) некоторый базис абелевых дифференциалов 1 рода. Через ядро (8) и дифференциалы (4) можно в явном виде выразить другие аналоги ядра Коши на $\mathfrak{R}$. Построим выражение

$$d\omega_{(z,w)}(\tau,\zeta)=\frac{\begin{vmatrix} \frac{w+\zeta}{2\zeta}\frac{d\tau}{\tau-z} & \frac{d\tau}{\zeta} & \dots & \frac{\tau^{h-1}d\tau}{\zeta} \\ \int\limits_{\mathbf{a}_1}\frac{w+\zeta}{2\zeta}\frac{d\tau}{\tau-z} & \int\limits_{\mathbf{a}_1}\frac{d\tau}{\zeta} & \dots & \int\limits_{\mathbf{a}_1}\frac{\tau^{h-1}d\tau}{\zeta} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \int\limits_{\mathbf{a}_h}\frac{w+h}{2\zeta}\frac{d\tau}{\tau-z} & \int\limits_{\mathbf{a}_h}\frac{d\tau}{\zeta} & \dots & \int\limits_{\mathbf{a}_h}\frac{\tau^{h-1}d\tau}{\zeta} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \int\limits_{\mathbf{a}_1}\frac{d\tau}{\zeta} & \dots & \int\limits_{\mathbf{a}_1}\frac{\tau^{h-1}d\tau}{\zeta} \\ \dots & \dots & \dots \\ \int\limits_{\mathbf{a}_h}\frac{d\tau}{\zeta} & \dots & \int\limits_{\mathbf{a}_h}\frac{\tau^{h-1}d\tau}{\zeta} \end{vmatrix}}. \tag{9}$$

Из свойства ядра (8) легко следует, что $d\omega_{(z,w)}(\tau, \zeta)$ по переменной (τ, ζ) есть абелев дифференциал 3 рода с теми же полюсами и вычетами, что и (8). По переменной (z, w) выражение (9) аналитично в точках $(\infty, \pm\infty)$ и имеет разрывы 1 рода вдоль линий $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_h$. Фиксируя конечную точку $(z_0, w_0) \in \mathfrak{R}$, рассмотрим выражение

$$d\hat{\omega}_{(z,w),(z_0,w_0)}(\tau, \zeta) = d\omega_{(z,w)}(\tau, \zeta) - d\omega_{(z_0,w_0)}(\tau, \zeta), \tag{10}$$

называемое **разрывным аналогом ядра Коши** [3] на $\mathfrak{R}$. Свойства ядра (10) легко выводятся из представления (9). Разрывный аналог ядра Коши входит в формулу для общего решения однородной задачи (2).

Пусть на $\mathfrak{R}$ задан дивизор Δ, обладающий следующими свойствами минимальности [3]: $\mathfrak{i}[\Delta] = \mathfrak{r}[\Delta^{-1}] = 0$, $\operatorname{ord}\Delta = h-1$. **Мероморфным аналогом ядра Коши** с характеристическим дивизором Δ называется выражение $A(z, w; \tau, \zeta)d\tau$, являющееся по переменной (z, w) рациональной функцией, а по (τ, ζ) — абелевым дифференциалом с простым полюсом в точке $(\tau, \zeta) = (z, w)$, в которой вычет равен $+1$. Кроме того, по переменной (z, w) выражение $A(z, w; \tau, \zeta)d\tau$ кратно дивизору $(\tau, \zeta)^{-1}\Delta^{-1}$, а по переменной (τ, ζ) — дивизору $(z, w)^{-1}\Delta$. Для любого минимального дивизора Δ существует единственный мероморфный аналог ядра Коши $A(z, w; \tau, \zeta)d\tau$ с характеристическим дивизором Δ. Этот аналог ядра Коши может быть в явном виде выражен через ядро (8) и дифференциалы (4), но ввиду громоздкости мы его здесь не приводим.

Одесский инженерно-строительный
институт

Поступило
1 II 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Э. И. Зверович, ДАН, 188, № 1 (1969). [2] Э. И. Зверович, ДАН, 192, № 3 (1970). [3] Э. И. Зверович, ДАН, 198, № 1 (1971). [4] Дж. Спрингер, Введение в теорию римановых поверхностей, ИЛ, 1960. [5] М. Шиффер, Д. К. Спенсер, Функционалы на конечных римановых поверхностях, ИЛ, 1957. [6] A. Krazer, Lehrbuch der Thetafunctionen, Leipzig, 1902. [7] Н. Г. Чеботарев, Теория алгебраических функций, М.— Л., 1948.