Доклады Академии наук СССР
1971. Том 199, № 4

УДК 519.281

МАТЕМАТИКА

А. М. КАГАН, академик Ю. В. ЛИННИК, И. В. РОМАНОВСКИЙ, А. Л. РУХИН

СЕМЕЙСТВА С «САМОУПРАВЛЕНИЕМ»

Рассматривается задача последовательного оценивания параметра $\theta \in R^1$ в стандартной схеме прямых измерений

$$x_i = \theta + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

где погрешности измерений ε_i предполагаются независимыми одинаково распределенными случайными величинами с полностью известной функцией распределения $F(x)$. Другими словами, мы занимаемся последовательным оцениванием параметра сдвига θ по данным независимых наблюдений $x_1, x_2, \ldots$, распределенных по закону $F(x-\theta)$. Если τ — марковский момент остановки, а $\bar\theta_\tau = \bar\theta_\tau(x_1, \ldots, x_\tau)$ — оценка для θ, построенная на базе наблюдений до момента τ, то ущерб статистики (когда θ является истинным значением параметра) измеряется неотрицательной функцией потерь $w(\bar\theta_\tau - \theta, \tau) = w_\tau(\bar\theta_\tau - \theta)$, математическое ожидание которой

$$W(\delta, \theta) = E_\theta w(\bar\theta_\tau - \theta, \tau)$$

называется **риском оценочной процедуры** $\delta = (\tau, \bar\theta_\tau)$.

Положим $dP_\theta = \prod_{i=1}^{\infty} dF(x_i - \theta)$, $\Upsilon_n = (x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_1)$ и пусть Y_n — σ-алгебра, порожденная случайным вектором Υ_n. Мы будем рассматривать только такие процедуры δ (назовем их инвариантными), для которых

$$P_\theta(\tau = 1) = 0, \quad \theta \in R^1, \tag{2}$$

$$(\tau = n) \in Y_n, \quad n = 2, 3, \ldots, \tag{3}$$

$$\bar\theta_\tau(x_1 + c, \ldots, x_\tau + c) = \bar\theta_\tau(x_1, \ldots, x_\tau) + c \quad \text{при всех} \quad c \in R^1. \tag{4}$$

Очевидно, что для всякой инвариантной процедуры $\delta = (\tau, \bar\theta_\tau)$ ее риск не зависит от θ:

$$W(\delta, \theta) = E_0 w(\bar\theta_\tau, \tau) = W(\delta). \tag{5}$$

В связи с этим естественно поставить вопрос об отыскании оптимальной инвариантной процедуры $\delta_0 = (\tau_0, \bar\theta_{\tau_0})$, для которой

$$W(\delta_0) = \min_\delta W(\delta).$$

Легко понять, как оптимально оценивать параметр θ при фиксированном правиле остановки τ. Действительно, если существует оптимальная инвариантная оценка $\hat\theta_n$ параметра θ по выборке объема n, отвечающая функции потерь w_n, т. е.

$$\min_{\tilde\theta_n} E_\theta w(\tilde\theta_n - \theta, n) = E_\theta w(\hat\theta_n - \theta, n), \tag{6}$$

где минимум слева берется по всем инвариантным оценкам, то, как легко видеть, $\hat\theta_n$ имеет вид $\hat\theta_n = x_1 + \hat\psi_n(\Upsilon_n)$ и

$$E_0\{w_n(x_1 + \hat\psi_n(\Upsilon_n)) \mid \Upsilon_n\} = \min_{c \in R^1} E_0\{w_n(x_1 + c) \mid \Upsilon_n\} \tag{7}$$

для почти всех по мере P_0 значений Υ_n, откуда уже выводим, что на множестве $(\tau = n)$ с условием (3)

$$\int\limits_{(\tau=n)} w_n(\hat{\theta}_n)\,dP_0 \leqslant \int\limits_{(\tau=n)} w_n(\tilde{\theta}_n)\,dP_0, \tag{8}$$

какова бы ни была оценка $\tilde{\theta}_n$ под условием (4). Определим оценку $\hat{\theta}_\tau$ следующим образом: на $(\tau = n)$ пусть $\hat{\theta}_\tau = \hat{\theta}_n$, $n = 2, 3, \ldots$ Тогда из (8) следует, что при фиксированном правиле остановки τ $\min\limits_{\tilde{\theta}_\tau} W[\delta = (\tau, \tilde{\theta}_\tau)]$ достигается на $\hat{\theta}_\tau$ и, таким образом, проблема выбора оптимальной инвариантной процедуры оценивания θ состоит в отыскании оптимального правила остановки τ_0. Статистику $\hat{\theta}_\tau$ мы назовем оценкой Питмэна, отвечающей правилу остановки τ (ср. [1]). Легко видеть, что в случае, когда $F'(x) = f(x)$, $\hat{\theta}_n$ можно найти из условия

$$\min_{\tilde{\theta}_n} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} w_n(\tilde{\theta}_n - u) \prod_1^n f(x_i - u)\,du = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} w_n(\hat{\theta}_n - u) \prod_1^n f(x_i - u)\,du, \tag{9}$$

откуда непосредственно выводим, что в этом случае существует вариант оценки $\hat{\theta}_\tau$, зависящей от наблюдений только через достаточные статистики.

Назовем гипернормальными распределениями на прямой распределения, задаваемые плотностями по мере Лебега

$$f(x) = C \exp(Ae^{\gamma x} + Bx), \quad x \in R^1, \tag{10}$$

где A, γ — вещественные, $A\gamma \neq 0$, C — нормирующая постоянная. Отметим, что нормальный и оба экспоненциальных закона (на $(-\infty, a)$ и на $(a, +\infty)$) получаются в качестве предельных для законов вида (10) и поэтому мы их также будем относить к гипернормальным.

Распределения (10), называемые иногда двойными экспоненциальными, появляются в качестве предельных для членов вариационного ряда и поэтому широко используются в приложениях как модельные (см. [2]).

Для нас гипернормальные распределения интересны в силу того обстоятельства, что семейство

$$\{f(x_1 - \theta) \ldots f(x_n - \theta), \quad \theta \in R^1\}$$

имеет достаточную статистику $T_n = \sum\limits_{i=1}^n \exp \gamma x_i$. Нетрудно видеть (см., например, [6]), что T_n (равно как и предельные статистики $\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + \ldots + x_n)$ в случае семейства сдвигов нормального закона, $\min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i$ (соответственно $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i$) в случае семейства сдвигов экспоненциального распределения на $(a, +\infty)$ (соответственно на $(-\infty, a)$) является полной достаточной статистикой и, следовательно, не зависит от вектора Υ_n. Как будет видно ниже, именно в этом (точнее, в тривиальности пересечения Y_n с σ-алгеброй, порожденной статистикой T_n) причина того, что в теоремах 1 и 2 оптимальное правило остановки τ_0 вырожденное. Это обстоятельство было замечено А. И. Шалытом [3] для нормального и экспоненциального законов.

Сформулируем теперь основные результаты.

Теорема 1. *Если погрешности в схеме* (1) *подчиняются гипернормальному распределению, то в задаче инвариантного оценивания параметра θ при произвольном ущербе $w \geqslant 0$ одна из оптимальных процедур $\delta_0 = (\tau_0, \hat{\theta}_{\tau_0})$ — если таковые вообще существуют* — имеет вид $\tau_0 = n_0$ с вероятностью* 1, *где n_0 определяется функцией потерь, $\hat{\theta}_n$ дается формулой* (9).

* Условие существования видно из доказательства; см. ниже.

Теорема 2. *Если погрешности в схеме* (1) *подчиняются гипернормальному распределению, то в задаче минимизации* $E_\theta w(\hat\theta_\tau-\theta,\tau)$ *при условии* $E_\theta g(\tau)\leqslant N$, *где* $\delta=(\tau,\hat\theta_\tau)$ *пробегает множество инвариантных процедур, функция* $w\geqslant 0$ *произвольна,* $g(t)\geqslant 0$ *и не убывает, одна из оптимальных процедур имеет вид*

$$\tau_0=n' \quad \text{с вероятностью} \quad q,$$

$$\tau_0=n'' \quad \text{с вероятностью} \quad 1-q.$$

Значения n', n'', q *определяются функциями* w, $g(t)$ *и постоянной* N *и не зависят от наблюдений* $x_1, x_2, \ldots$; $\hat\theta_n$ *дается формулой* (9).

Таким образом, с точки зрения последовательного оценивания θ в схеме (1) эти распределения «самоуправляются», т. е. вид закона управляет оптимальной остановкой (предыдущие же наблюдения не нужны для решения, остановиться в данный момент или продолжить наблюдения).

Доказательство теорем. Пусть $\hat\theta_\tau$ — оптимальная инвариантная оценка, отвечающая функции потерь w и инвариантному правилу остановки τ, $\delta=(\tau,\hat\theta_\tau)$. Имеем

$$W(\delta,\theta)=E_\theta w(\hat\theta_\tau-\theta,\tau)=W(\delta)=$$
$$=\sum_{n=2}^{\infty}P_0(\tau=n)E_0\{w(\hat\theta_n,n)\mid\tau=n\}=\sum_{n=2}^{\infty}P_0(\tau=n)E_0w(\hat\theta_n,n),$$

поскольку $\hat\theta_n$ не зависит от Υ_n и тем более от события $(\tau=n)$. Пусть $P_0(\tau=n)=p_n$, $E_0w(\hat\theta_n,n)=d_n$, тогда $W(\delta)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}p_nd_n$. Если теперь n_0 таково, что $d_{n_0}=\min\limits_{2\leqslant k<\infty}d_k$, то правило τ_0, предписывающее провести ровно n_0 наблюдений, оптимально; если же такого n_0 не существует, то, очевидно, оптимального правила не существует. Это доказывает теорему 1.

Для завершения доказательства теоремы 2 найдем

$$\min_{p_2,p_3,\ldots}\sum_{n=2}^{\infty}p_nd_n \quad \text{при условии} \quad \sum_{n=2}^{\infty}p_ng(n)\leqslant N.$$

Рассмотрим на плоскости наименьшее выпуклое множество S, содержащее все точки вида $(g(n),y)$, где $y\geqslant d_n$. Граница этого множества представляет собой выпуклую ломаную с вершинами в некоторых из точек $(g(n),d_n)$. Пусть $n_1, n_2,\ldots$ — индексы этих точек в порядке возрастания. Если теперь k таково, что

$$g(n_k)\leqslant N<g(n_{k+1}), \tag{11}$$

то при $d_{n_{k+1}}<d_{n_k}$

$$\min\sum_{2}^{\infty}p_nd_n \quad \text{при условии} \sum_{2}^{\infty}p_ng(n)\leqslant N \tag{12}$$

достигается при

$$p_{n_k}=\frac{g(n_{k+1})-N}{g(n_{k+1})-g(n_k)}, \quad p_{n_{k+1}}=\frac{N-g(n_k)}{g(n_{k+1})-g(n_k)}, \tag{13}$$

$p_n=0$ для остальных значений n.

Если же $d_{n_{k+1}}>d_{n_k}$, то решением задачи (12) является $p_{n_l}=1$, где n_l определяется условием $d_{n_l}=\min\limits_{j\leqslant k}d_{n_j}$. Наибольший интерес, разумеется, представляет случай монотонного убывания d_n.

Отметим, что решение задачи (13) единственно, если на прямой, соединяющей точки $(g(n_k), d_{n_k})$ и $(g(n_{k+1}), d_{n_{k+1}})$ не лежит других точек $(g(n_l), d_{n_l})$.

Оптимальное правило остановки в теореме 2 имеет вид

$$\tau_0 = n_k \quad \text{с вероятностью} \quad p_{n_k},$$
$$\tau_0 = n_{k+1} \quad \text{с вероятностью} \quad 1 - p_{n_k},$$

если решение задачи (12) дается формулами (13), и оно имеет вид $\tau_0 = n_l$ с вероятностью 1, если решение задачи (12) есть $p_{n_l} = 1$. Таким образом, в условиях теоремы 2 для построения оптимального правила остановки требуется решить задачу линейного программирования. Заметим еще, что если k с условием (11) не существует, т. е. если $g(n_k) \leqslant N$ при всех k, то дело сводится к теореме 1.

При некоторых общих априорных условиях можно показать, с помощью результатов работ ([4], [5]), что независимость оценки Питмэна $\hat{\theta}_n$ и вектора Υ_n есть характеристическое свойство гипернормальных распределений. Поэтому «самоуправляемость» семейств в задаче последовательного оценивания параметра сдвига при произвольных функциях потерь является, по-видимому, привилегией семейств гипернормальных распределений.

Ленинградское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
21 IV 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] E. Pitman, Biometrika, 30, III—IV (1938). [2] Г. Хан, С. Шапиро, Статистические модели в инженерных задачах, М., 1969. [3] А. И. Шалыт, ДАН, 193, № 4 (1970). [4] Е. Б. Дынкин, Усп. матем., наук, 6, 1 (1951). [5] А. М. Каган, В сборн. Предельные теоремы и статистические выводы, Ташкент, 1966. [6] Э. Леман, Проверка статистических гипотез, М., 1964.