Доклады Академии наук СССР
1971. Том 196, № 6

УДК 519.21 *МАТЕМАТИКА*

Г. П. КЛИМОВ, А. Д. КУЗЬМИН

ОБОБЩЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФИДУЦИАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПО ФИШЕРУ — ЛИНДЛИ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 20 VII 1970)

0. Введение. Пусть $F(x|\theta)$ для каждого $\theta \in (\theta_0, \theta_1)$ есть функция распределения (ф.р.) одномерной с.в. x. Предположим также, что $F(x|\theta)$ убывает по θ при каждом x, $\lim\limits_{\theta\downarrow\theta_0} F(x|\theta) = 1$, $\lim\limits_{\theta\uparrow\theta_1} F(x|\theta) = 0$ и $F(x|\theta)$ — дифференцируемая функция по x и θ. Формально для каждого x $F^*(\theta|x) = 1 - F(x|\theta)$ как функция по θ удовлетворяет всем свойствам ф.р. Фишер [1] назвал эту функцию фидуциальной ф.р. (ф.ф.р.) и предложил использовать ее в качестве распределения истинного значения параметра θ при заданном наблюдении x. Линдли [2] указал необходимые и достаточные условия, при которых плотность $f^*(\theta|x) = \dfrac{\partial}{\partial\theta} F^*(\theta|x)$ может быть получена из байесовских доводов, отправляясь от некоторой априорной меры параметра θ. Такое условие заключается в существовании преобразований от x к y и от θ к τ таких, что τ есть параметр сдвига для y. Линдли считал, что плотность фидуциального распределения должна вычисляться по формуле Байеса «или иначе фишеровская концепция фальшива» [2]. Если θ уже есть параметр сдвига для x, то $f^*(\theta|x) = f(x|\theta) = \dfrac{\partial}{\partial x} F(x|\theta)$. Отметим, что плотности f^* и f берутся относительно одной и той же линейной лебеговской меры на прямой. В статье для одного класса статистических моделей обобщается определение ф.ф.р. по Фишеру, отправляясь от равенства $f^*(\theta|x) = f(x|\theta)$.

1. Будем пользоваться предположениями и обозначениями статьи [3]. Предположения 1—7 задают статистическую модель проведения эксперимента. Считая объекты $\Omega = X$, G заданными, обозначим через Π множество таких статистических моделей. Тем самым, модели могут отличаться лишь семейством $\mathcal{P} = \{P_\theta, \theta \in \Omega\}$ распределений на выборочном пространстве (X, B). Поэтому статистическую модель будем обозначать соответствующим семейством $\mathcal{P}$, так что $\Pi = \{\mathcal{P}\}$. Назовем регулярную меру ν на $\Omega = X$ априорной фидуциальной мерой (а.ф.м.), если из

$$\mathcal{P} = \{P_\theta, \theta \in \Omega\} \in \Pi, \quad p(x|\theta) = dP_\theta(x) / d\nu(x)$$

следует

$$p^*(\theta|x) = p(x|\theta) = dP_x^*(\theta)/d\nu(\theta), \quad \mathcal{P}^* = \{P_x^*, x \in X\} \in \Pi. \qquad (1)$$

В статье показывается, что существует единственная а.ф.м. ν, которая является относительно инвариантной мерой на однородном пространстве X, G с коэффициентом сдвига $\Delta^{-1}(g)$, где $\Delta(g)$ — модулярная функция на группе G. При этом само семейство $\mathcal{P}^*$ определяется однозначно и называется семейством фидуциальных распределений для $\mathcal{P}$. Относительно меры ν требуется еще лишь, чтобы из $\nu(E) = 0$ следовало $\nu(gE) = 0$ для всех $g \in G$.

В самом деле, если ν — а.ф.м., то из равенства (1) с учетом, что $\mathcal{P}$ и $\mathcal{P}^*$ — однородные семейства распределений, следует, что мера ν должна быть относительно инвариантной мерой на однородном пространстве X, G.

Пусть $\nu(gE) = \delta(g)\nu(E)$ для всех $g \in G$ и $E \in B$. Из однородности семейства $\mathscr{P}$ следует, что

$$p(x|\theta) = p(gx|g\theta)\delta(g). \tag{2}$$

Полагая в (2) $x = x_0 = \theta_0 = \theta = H$, $g = h \in H$, получим

$$p(x_0|\theta_0) = p(hx_0|h\theta_0)\delta(h) = p(x_0|\theta_0)\delta(h),$$

откуда $\delta(h) = 1$ для всех $h \in H$. Так как $\delta(gh) = \delta(g)\delta(h) = \delta(g)$, $\delta(hgh') = \delta(h)\delta(g)\delta(h') = \delta(g)$, то $\delta(g)$ зависит от g через $x(g) = gH$ и, более того, через $\varphi(x(g)) = HgH$. Значит, имеют смысл обозначения $\delta(x)$, $\delta(\theta)$, $\delta(\varphi)$. Заметим, что $\delta(\theta^{-1}x) = \delta^{-1}(\theta)\delta(x)$, $\delta(\varphi^{-1}) = \delta^{-1}(\varphi)$, где $\varphi^{-1} = Hg^{-1}H$, если $\varphi = HgH$.

Далее, полагая в (2) $g = g_\theta^{-1}$, где $\theta = g_\theta H$, получим

$$p(x|\theta) = p(g_\theta^{-1}x\,|\,\theta_0)\,\delta(g_\theta^{-1}) = q(\theta^{-1}x)\,\delta^{-1}(\theta),$$

где $q(\varphi) = p(x|\theta_0)$, если $\varphi = \varphi(x) = Hx$.

Определение функции $q(\varphi)$ корректно, так как

$$p(hx|\theta_0) = p(hx|h\theta_0) = \delta^{-1}(h)p(x|\theta_0) = p(x|\theta_0),$$

т. е. $p(x|\theta_0)$ зависит от x через $\varphi(x)$.

Итак, мы получили формулу

$$p(x|\theta) = q(\theta^{-1}x)\,\delta^{-1}(\theta). \tag{3}$$

Далее,

$$1 = \int p(x|\theta)\,d\nu(x) = \int q(\theta^{-1}x)\,\delta^{-1}(\theta)\,d\nu(x) = \int q(g_\theta^{-1}x)\,\delta(g_\theta^{-1})\,d\nu(x) =$$

$$= \int q(g_\theta^{-1}x)\,d\nu(g_\theta^{-1}x) = \int q(x)\,d\nu(x) = \int q(\varphi(x))\,d\nu(x) = \int q(\varphi)\,d\nu(\varphi),$$

где, по определению, $q(x) = q(\varphi(x))$, а $d\nu(\varphi)$ — образ меры $d\nu(x)$ при каноническом отображении $X \ni x \mapsto \varphi(x) = Hx \in \Phi$. Аналогично:

$$1 = \int p^*(\theta|x)\,d\nu(\theta) = \int p(x|\theta)\,d\nu(\theta) = \int q(\theta^{-1}x)\,\delta^{-1}(\theta)\,d\nu(\theta) =$$

$$= \int \delta(\theta^{-1}x)\,q(\theta^{-1}x)\,\delta(g_x^{-1})\,d\nu(\theta) = \int \delta[\varphi^{-1}(g_x^{-1}\theta)]\,q[\varphi^{-1}(g_x^{-1}\theta)]\,d\nu(g_x^{-1}\theta)] =$$

$$= \int \delta[\varphi^{-1}(\theta)]\,q[\varphi^{-1}(\theta)]\,d\nu(\theta) = \int \delta(\varphi^{-1})\,q(\varphi^{-1})\,d\nu(\varphi) = \int \delta(\varphi)\,q(\varphi)\,d\nu(\varphi^{-1}).$$

Итак,
$$1 = \int q(\varphi)\,d\nu(\varphi) = \int \delta(\varphi)\,q(\varphi)\,d\nu(\varphi^{-1}).$$

В силу произвольности $\mathscr{P} \in \Pi$ получим

$$d\nu(\varphi) = \delta(\varphi)\,d\nu(\varphi^{-1}). \tag{4}$$

Доказано, что если ν является а.ф.м., то мера ν удовлетворяет и (4). Так как все рассуждения обратимы, то верно и обратное: если ν относительно инвариантная мера на X, G с коэффициентом сдвига $\delta(g)$ такая, что $\delta(h) = 1$ при $h \in H$ и выполнено (4), то ν является а.ф.м.

Займемся условием (4). Заметим сначала, что если положить $d\lambda(x) = \delta^{-1}(x)d\nu(x)$, то

$$d\lambda(gx) = \delta^{-1}(gx)d\nu(gx) = \delta^{-1}(g)\delta^{-1}(x)\delta(g)d\nu(x) = d\lambda(x),$$

т. е. λ — инвариантная мера на X, G. Теперь равенство $d\nu(x) = \delta(\varphi(x))d\lambda(x)$ влечет $d\nu(\varphi) = \delta(\varphi)d\lambda(\varphi)$. Условие (4) перепишется

$$\delta(\varphi)\,d\lambda(\varphi) = \delta(\varphi)\,\delta(\varphi^{-1})\,d\lambda(\varphi^{-1}) \text{ или } \delta(\varphi) = \frac{d\lambda(\varphi^{-1})}{d\lambda(\varphi)},$$

откуда следует единственность а.ф.м. Существование ее следует из теоремы статьи [3]. Отметим, что $\delta(\varphi) = \Delta^{-1}(\varphi)$.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
13 IV 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] R. A. Fisher, Statistical Methods and Scientific Inference, Edinburgh — London, 1956. [2] D. V. Lindley, J. Roy. Statist. Soc. B, 20, 102 (1958). [3] Г. П. Климов, ДАН, 196, № 5 (1971).