Доклады Академии наук СССР
1971. Том 199, № 4

УДК 517.946 *МАТЕМАТИКА*

В. В. КРЕХИВСКИЙ, М. И. МАТИЙЧУК

О КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ОПЕРАТОРОМ БЕССЕЛЯ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 3 II 1971)

В заметках ([6]) для параболических систем с оператором Бесселя (B-параболических систем) установлена корректная разрешимость задачи Коши и построены ядра Пуассона краевой задачи для четверти пространства. Здесь выясняется вопрос о корректной разрешимости общих граничных задач для произвольных цилиндрических областей в классах гёльдеровых функций. При этом описываются свойства ядра обратного оператора — матрицы Грина в случае однородной краевой задачи.

Отметим, что исследованию B-эллиптических краевых задач посвящены новые работы ([5]).

1. Постановка задачи. Основные предположения. Рассмотрим в области $Q = (0, T) \times \Omega^+$, $\Omega^+ = [0, \infty) \times \Omega$, $\Omega \subset E_{n-1}$, для системы уравнений

$$Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} \sum_{|k|+2j\leqslant 2b} A_{kj}(t, x)\, D_{x'}^k B_{x_n}^j u = f(t, x) \tag{1}$$

смешанную задачу

$$\begin{gathered} \mathcal{B}_i u\,|_\Gamma \equiv \sum_{|k|+2j\leqslant r_i} b_{ij}^{(k)}(t, x)\, D_{x'}^k B_{x_n}^j u\,|_\Gamma = f_i(t, x), \\ u\,|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x_n}\right|_{x_n=0} = 0 \quad (i = 1, \ldots, bN), \end{gathered} \tag{2}$$

где $B_{x_n} = \dfrac{\partial^2}{\partial x_n^2} + \dfrac{2\nu+1}{x_n}\dfrac{\partial}{\partial x_n}$ $\nu \geqslant -1/2$, $\Gamma = (0, T) \times S^+$, $S^+ = (0, \infty) \times S$, S — граница связной области Ω, $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \Omega$, $0 \leqslant r_i \leqslant 2b - 1$. Предположим, что 1) задача (1), (2) параболическая, т. е. L — параболический оператор, который связан с граничными операторами $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_{bN}$ условием Лопатинского ([6]); 2) выполнены условия согласования, а именно:

$$\text{при } r_i > 0 \quad \mathcal{B}_i\varphi(x) = f_i(t, x), \quad t = 0, \quad x \in S^+;$$
$$\text{при } \quad r_i = 0 \quad L\varphi(x) = f(t, x), \quad \frac{\partial}{\partial t} f(t, x) = 0, \quad t = 0, \quad x \in S^+.$$

Определим теперь пространства, в которых рассматривается задача (1), (2).

Определение. Функция $u(t, x)$ в области Q принадлежит классу $C^{(l)}(Q)$, если она имеет непрерывные производные вида $D_t^{k_0} D_{x'}^k B_{x_n}^j u(t, x)$, $2bk_0 + |k| + 2j \leqslant [l]$ и конечна норма

$$\|u\|_l = \|u(t, x)\|_{C([l])} + \sum_{2bk_0+|k|+2j=[l]} [D_t^{k_0} D_{x'}^k B_{x_n}^j u]_{\{l\}, x} + $$
$$+ \sum_{0<l<2bk_0-|k|-2j<2b} [D_t^{k_0} D_{x'}^k B_{x_n}^j u]_{l-2bk_0-|k|-2j/2b,\, t'}$$

где, например,

$$[D^m u(t,x)]_{\rho,x} = \sup_{Q,\, x\neq\xi} \frac{|D^m u(t,x) - D^m u(t,\xi)|}{|x-\xi|^\rho}, \quad \rho\in(0,1),$$

$[l]$ — целая, а $\{l\}$ — дробная часть нецелого числа l.

Подпространство функций $u(t,x)$ из $C^{(l)}(Q)$, производные $D_t^{k_0}u(t,x)$, $0\leqslant k_0\leqslant[l/2b]$, которых при $t=0$ обращаются в нуль, обозначим через $\mathring{C}^{(l)}(Q)$.

2. Основные результаты. С помощью развитой В. А. Солонниковым методики исследования общих параболических граничных задач ([3]) устанавливается

Теорема 1 (о корректности). *Пусть задача* (1), (2) *параболическая и выполнены условия согласования* 2). *Если поверхность S принадлежит классу $C^{(2b+\alpha)}$, $A_k(t,x)\in C^{(\alpha)}(Q)$, $b_{ij}^{(k)}(t,x)\in C^{(2b-r_i+\alpha)}(\Gamma)$, $f(t,x)\in C^{(\alpha)}(Q)$, $\varphi(x)\in C^{(2b+\alpha)}(\Omega^+)$, $f_i(t,x)\in C^{(2b-r_i+\alpha)}(\Gamma)$, то задача* (1), (2) *в пространстве $C^{(2b+\alpha)}(Q)$ имеет единственное решение $u(t,x)$, для которого справедлива оценка*

$$\|u\|_{2b+\alpha}\leqslant C\left(\|\varphi\|_{2b+\alpha}+\|f\|_\alpha+\sum_{i=1}^{bN}\|f_i\|_{2b-r_i+\alpha}\right),$$

где C зависит от норм коэффициентов системы и граничных операторов, от различных характеристик области Ω и границы S, чисел $2b$, n, ν, T и постоянной параболичности.

Как обычно ([3]), решение неоднородной задачи определяется с помощью регуляризатора явной формулой, в которую в качестве слагаемых входят интегралы типа объемных и поверхностных параболических потенциалов. Их оценки проводятся на основе оценок функции Грина задачи Коши, ядер Пуассона задачи для четверти пространства ([6]), свойств операторов Бесселя и обобщенного сдвига и следующей леммы.

Лемма 1. *Пусть матрица* $G(t,x,\xi)=t^{-(n_\nu+2b)/2b}\, T_{x_n}^{\xi_n}\Omega\left(\frac{x'-\xi'}{t^{1/2b}},\frac{x_n}{t^{1/2b}}\right)$, $n_\nu=n-2+2(\nu+1)$ *определена в области* $\Omega^{++}=[0,T]\times E_n^{++}$, $E_n^{++}=E_{n-1}^+\times(0,\infty)$ *и есть решение системы*

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\sum_{|k|+2j=2b}A_{kj}D_{x'}^{k}B_{x_n}^{j}u. \tag{3}$$

Если выполняются неравенства

$$|D_z^m\Omega(z)|\leqslant C_m\exp\{-c|z|^q\}\quad (m\leqslant 2b,\quad q=2b/(2b-1)),$$

то при $x_n>0$

$$\int_{E_{n-1}^+} T_{x_n}^{z_n}\Omega(z_1,\ldots,z_{n-2},0,z_n)\cdot z_n^{2\nu+1}\,d\bar z=0,$$

где $E_{n-1}^+=E_{n-2}\times(0,\infty)$, $\bar z\in E_{n-1}^+$ (см. аналогичную лемму в ([2])).

Для примера приведем оценку одного из поверхностных интегралов, входящих в конструкцию решения задачи (1), (2).

Лемма 2. *Пусть $G_l(t,x,\xi)$ — элементы l-го столбца фундаментальной матрицы решений краевой задачи для системы* (3) *с условиями*

$$\sum_{|k|+2j=r_i} b_{ij}^{(k)}D_{x'}^{k}B_{x_n}^{j}u\Big|_{x_{n-1}=0}=f_i(t,\bar x),\quad \frac{\partial u}{\partial x_n}\Big|_{x_n=0}=0,\quad u\big|_{t=0}=0,$$

а функция $f_l(t,\bar x)$ принадлежит классу $\mathring{C}^{(2b-r_l+\alpha)}([0,T]\times E_{n+1}^+)$.

Тогда функция

$$u_l(t,x)=\int_0^t d\tau\int_{E_{n-1}^+} G_l(t-\tau,x,\bar\xi)\,f_l(\tau,\bar\xi)\,\xi_n^{2\nu+1}\,d\bar\xi\equiv Gf_l$$

принадлежит пространству $\overset{\circ}{C}^{(2b+\alpha)}(\Omega^{++})$ и оператор G действует ограниченным образом из $C^{(2b-r_i+\alpha)}$ в $\overset{\circ}{C}^{(2b+\alpha)}(\Omega^{++})$.

Для однородной задачи (1), (2) ($f_i \equiv 0$) справедлива

Теорема 2 (о функции Грина). *Если*

$$A_k(t, x) \in C^{(\alpha)}(Q), \; b_{ij}^{(k)}(t, x) \in C^{(2b-r_i+\alpha)}(\Gamma), \;\; S \in C^{(2b+\alpha)},$$

то существует матрица Грина $\mathscr{E}(t, x; \tau, \xi)$ однородной задачи (1), (2), *обладающая свойствами*

а) $\mathscr{E}(t, x; \tau, \xi) = Z(t, x; \tau, \xi) - V(t, x; \tau, \xi)$, *где* $Z(t, x; \tau, \xi)$ — *фундаментальная матрица решений системы* (1) ([6]), *а* $V(t, x; \tau, \xi)$ *при* $t > \tau$ *и фиксированном* $\xi \in \Omega^+$ — *решение однородного уравнения* (1), *удовлетворяющее краевым условиям*

$$\begin{gathered} \mathscr{B}_i V\big|_\Gamma = \mathscr{B}_i Z(t, x; \tau, \xi) \quad (i = 1, \ldots, bN), \\ V(t, x; \tau, \xi)\big|_{t=\tau} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x_n} V(t, x; \tau, \xi)\big|_{x_n=0} = 0, \end{gathered} \tag{4}$$

для которого справедливы оценки

$$\begin{gathered} |D_{x'}^k B_{x_n}^j V(t, x; \tau, \xi)| \leqslant C_{kj}(t-\tau)^{-(n-1+2(\nu+1)+|k|+2j)/(2b)} T_{x_n}^{\xi_n} \times \\ \times \exp[-c(x_n/(t-\tau)^{1/2b})^q] \exp\{-c[|x'-\xi'| + \rho(\xi', S)]^q (t-\tau)^{-1/(2b-1)}\}; \\ |\Delta_h D_{x'}^k B_{x_n}^j V(t, x; \tau, \xi)| \leqslant C_{kj} |h|^\alpha (t-\tau)^{-p_{kj}/(2b)} T_{x_n}^{\xi_n} \times \\ \times \left\{\exp\left[-c\left(\frac{x_n+q_n}{(t-\tau)^{1/2b}}\right)^q\right] + \exp\left[-c\left(\frac{x_n}{(t-\tau)^{1/2b}}\right)^q\right]\right\} \times \\ \times \{\exp[-c(|x'+h'-\xi'| + \rho(\xi', S))^q (t-\tau)^{-1/2b-1}] + \\ + \exp[-c(|x'-\xi'| + \rho(\xi', S))^q (t-\tau)^{-1/2b-1}]\} \\ (|k| + 2j \leqslant 2b, \quad p_{kj} = n - 1 + 2(\nu+1) + |k| + 2j + \alpha), \end{gathered}$$

где $T_{x_n}^{\xi_n}$ — *оператор обобщенного сдвига*, $\Delta_h f(x, \xi) = f(x+h, \xi) - f(x, \xi)$, $\rho(\xi', S) = \inf \rho(\xi', y')$, $y' \in S$;

б) *для любых функций* $f(t, x) \in \overset{\circ}{C}^{(\alpha)}(Q)$, $\varphi(x) \in C(\Omega^+)$ *решение однородной задачи* (1), (2) *дается формулой*

$$u(t, x) = \int_{\Omega^+} \mathscr{E}(t, x; 0, \xi)\varphi(\xi)\xi_n^{2\nu+1} d\xi + \int_0^t d\tau \int_{\Omega^+} \mathscr{E}(t, x; \tau, \xi) f(\tau, \xi)\xi_n^{2\nu+1} d\xi.$$

Отметим, что определение с помощью регуляризатора решения задачи (1), (4) и получение вплоть до границы точных оценок его производных составляет большие трудности: нужно оценивать объемные и поверхностные потенциалы, ядра и плотности которых имеют сильные особенности. В этой части наши исследования существенно опираются на работу ([2]).

Авторы глубоко признательны и сердечно благодарны С. Д. Эйдельману за полезное обсуждение работы.

Поступило
4 I 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Д. Эйдельман, Параболические системы, М., 1964. [2] С. Д. Ивасишен, С. Д. Эйдельман, ДАН, 172, № 6, 1262 (1967); Докл. АН УРСР, № 7 (1966). [3] В. А. Солонников, Тр. матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, 83, 3 (1965). [4] В. А. Солонников, Зап. научн. семинаров Ленингр. отд. матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, 14, 256 (1969). [5] И. А. Киприянов, М. И. Ключанцев, ДАН, 188, № 5 (1969); Сибирск. матем. журн., 11, № 5 (1970). [6] В. В. Крехивский, М. И. Матийчук, ДАН, 181, № 6 (1968); Докл. АН УРСР, № 3 (1970).