

Член-корреспондент АН СССР Н. С. ЛИДОРЕНКО, Д. А. ПОПОВ

К РАСЧЕТУ АКСЕЛЬРОМЕТРА НА ИОННЫХ НОСИТЕЛЯХ

В работе рассмотрена модель датчика постоянных ускорений <sup>(2)</sup>, показанная на рис. 1. В этой модели датчик представляет собой кольцевую систему четырех плоских камер, заполненную раствором  $A^-B^+ + A^0$  в воде. Стенки электродных камер (каналов) являются катодами. Потенциалы электродов выбраны таким образом, что на них происходят следующие реакции:

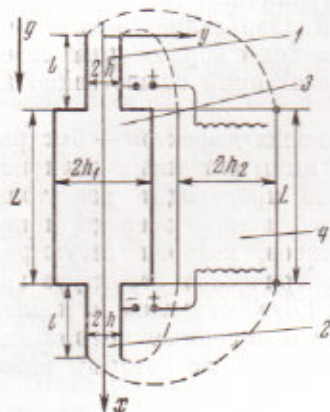
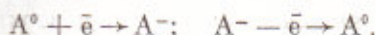


Рис. 1. Модель датчика: 1 — верхняя электродная камера, 2 — нижняя электродная камера, 3 — катодная камера, 4 — анодная камера

Предположим, что в начальный момент все нейтральное вещество  $A^0$  находится в анодной камере, и система помещается в постоянное поле ускорения силы тяжести  $g$ , направленное как показано на рис. 1. За счет разности плотностей электролита возникает конвективный поток. Скорость этого течения, а следовательно, и ток во внешней цепи однозначно связаны с величиной внешнего ускорения и ток может служить для ее измерения.

Система для измерения ускорений должна удовлетворять по крайней мере следующим двум требованиям: 1) существование стационарного течения при постоянном ускорении; 2) не слишком большие времена релаксации тока при изменении  $g$ . Мы покажем, что рассматриваемая модель в режиме «полного поглощения» удовлетворяет обоим этим требованиям и найдем зависимость тока во внешней цепи от  $g$ , что дает возможность оценить чувствительность прибора.

Процесс естественной конвекции в случае слабого раствора двух веществ описывается следующей системой уравнений <sup>(1)</sup>:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \text{ grad}) \mathbf{V} &= - \frac{\text{grad } p}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{V} + \frac{(C + C')}{\rho} \mathbf{g}; \quad \text{div } \mathbf{V} = 0, \\ \frac{\partial C}{\partial t} + (\mathbf{V} \text{ grad}) C &= D \nabla^2 C, \\ \frac{\partial C'}{\partial t} + (\mathbf{V} \text{ grad}) C' &= D \nabla^2 C'. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь приняты обозначения:  $\mathbf{V}$  — вектор скорости течения,  $g$  — ускорение силы тяжести,  $C$  — концентрация  $A^0$  в весовых единицах,  $C_0' + C'$  — концентрация  $A^-B^+$ ,  $C_0'$  — постоянная концентрация ( $C_0' \gg C'$ ),  $\nu$  — кинематическая вязкость,  $D$  — коэффициент диффузии (считаем его одинаковым для  $A^-B^+$  и  $A^0$ );  $\rho + C + C'$  — полная плотность раствора,  $p_0 + p$  — давление ( $p_0 = \rho(gz)$ ). Мы предполагаем выполненными следующие условия:  $C + C' \ll \rho$ ;  $p \ll p_0$ .

Выбор осей координат и ряд используемых в дальнейшем обозначений показан на рис. 1. Мы будем считать концентрацию  $A^0$  на боковых стенках электродных камер равной нулю, что соответствует режиму предельного тока. Кроме того, на этих стенках выполняется условие

$$(\partial C' / \partial y)_{y=\pm h} = -k(\partial C / \partial y)_{y=\pm h},$$

т. е. на каждую единицу веса прореагировавшего на электроде  $A^0$  «рождается»  $k$  единиц  $A^-B^+$ . Боковые стенки катодной и анодной камеры непроницаемы. Сделаем ряд упрощающих предположений: 1) в каждой камере течение является пуазейлевским; 2) в анодной камере (где стоят анодные сетки) концентрация распределена равномерно (не зависит от координат); 3) в уравнениях для концентрации мы заменим пуазейлевский профиль некоторым средним поршневым.

Тогда в электродном канале концентрация  $A^0$  имеет вид

$$C(xyt) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k(xt) \cos \mu_k y; \quad \mu_k = (2k + 1) \pi / 2h.$$

Усредняя в этих предположениях уравнения (1) по поперечному сечению камер, мы получим следующую систему уравнений для средней концентрации и средней скорости:

$$a \frac{dV}{dt} = \frac{g}{\rho} (Q + Q' + Q_1 + Q'_1 + \tilde{Q} + \tilde{Q}' - Q_2 - Q'_2) - \frac{6\nu V l}{h^2} - \frac{3\nu V h L}{h_1^3} - \frac{3\nu V h L}{h_2^3},$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + V f_1(x) \frac{\partial C}{\partial x} = D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} - D \mu_0^2 f_2(x) C,$$

$$\frac{\partial C'}{\partial t} + V f_1(x) \frac{\partial C'}{\partial x} = D \frac{\partial^2 C'}{\partial x^2} + k D \mu_0^2 f_2(x) C, \quad (2)$$

$$\frac{d}{dt} (2h_1 Q_1 + 2h_2 Q_2 + 2h Q + 2h \tilde{Q}) = 0; \quad \frac{d}{dt} (2h_1 Q'_1 + 2h_2 Q'_2 + 2h Q' + 2h \tilde{Q}') = 0,$$

где

$$f_1(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < l; \\ h/h_1, & l < x < L+l, \end{cases} \quad f_2(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < l; \\ 0, & l < x < L+l, \end{cases}$$

$$Q = \int_0^l C dx; \quad Q_1 = \int_l^{l+L} C dx; \quad \tilde{Q} = \int_{l+L}^{2l+L} C dx; \quad Q_2 = C_2 L;$$

$$a = 2l + \frac{h}{h_1} L + \frac{h}{h_2} L$$

и аналогично для  $C'$ . В дальнейшем  $C, C_1, \tilde{C}, C_2$  обозначают средние концентрации соответственно в верхней электродной, катодной, нижней электродной и анодной камерах.

К этим уравнениям необходимо добавить условия непрерывности концентрации при  $x = 0, l, l + L, 2l + L$  и непрерывности потока при  $x = l, l + L$ . Эти условия имеют вид:  $C(0) = C_2; C(l) = C_1(l); C_1(l + L) = \tilde{C}(l + L); C(2l + L) = C_2;$

$$h \frac{\partial C}{\partial x}(l) = h_1 \frac{\partial C_1}{\partial x}(l); \quad h_1 \frac{\partial C_1}{\partial x}(l + L) = h \frac{\partial \tilde{C}}{\partial x}(l + L)$$

и аналогично для  $C'$ . В стационарном случае систему (2) можно решить точно.

Вводя  $R = kC + C'$ , легко показать, что  $R$  не зависит от  $x$ , откуда сразу следует

$$Q'_1 - Q'_2 = k(Q_2 - Q_1).$$

Это дает возможность больше не рассматривать  $C'$ , так как мы получаем замкнутую систему уравнений для  $C$ . В дальнейшем полагаем

$$Q_2 \gg Q; \quad \ddagger Q_2 \gg \tilde{Q}; \quad (hL/h_2^3) \ll (l/h^2); \quad (hL/h_2^3) \ll (l/h^2).$$

Уравнение для скорости в стационарном режиме имеет вид

$$V = \frac{gh^2(k-1)}{6\nu l \rho} (Q_2 - Q_1).$$

Функции  $Q_1(V)$ ,  $Q_2(V)$  мы находим, решая уравнения (2). Точное выражение очень громоздко. Его анализ показывает, что при  $l/h \gg 1$  справедливо приближенное уравнение

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \frac{1 - \exp(-\lambda l)}{1 + (h_1/h_2) \exp(-\lambda l)}; \quad \lambda = \frac{1}{2h} (\sqrt{\varepsilon^2 + \pi^2} - \varepsilon), \quad (3)$$

где приняты обозначения:

$$\varepsilon = \frac{Vh}{D}; \quad \varepsilon_0 = \frac{V_0 h}{D}; \quad V_0 = \frac{gh^2 L \Delta \rho (k-1)}{6\nu l \rho}.$$

Здесь  $2h_2 \Delta \rho L$  — полное количество  $A^0$  в системе.

Отметим, что

$$Q_1 \simeq C_2 L \exp(-\lambda l); \quad C_1(x) \simeq C_2 \exp(-\lambda l); \quad C_2 \simeq \frac{\Delta \rho}{1 + (h_1/h_2) \exp(-\lambda l)}.$$

Из уравнения (3) сразу видно, что если  $\varepsilon_0 < l/2h$ , то  $\varepsilon \simeq \varepsilon_0$ . Таким образом неравенство

$$(V_0 h / D) < (l/2h) \quad \text{или} \quad g < [3D^2 \rho \nu / h^4 \Delta \rho (k-1) L] \quad (4)$$

выделяет область линейной зависимости скорости от  $g$ . В этой области

$$V \simeq [gh^2 \Delta \rho (k-1) / 6\nu l \rho].$$

Как и следовало ожидать, условие (4) совпадает с условием полного поглощения  $A^0$  в электродном канале. Можно рассмотреть и другой крайний случай  $\varepsilon \gg (l/2h)$ , тогда

$$V \simeq \pi / (24)^{1/2} [g \Delta \rho (k-1) LD / \nu \rho]^{1/2}.$$

После того, как найдено выражение для скорости, расчет тока на электрод сводится к решению стационарного уравнения конвективной диффузии.

В режиме полного поглощения (4) в случае поршневого профиля скорости легко найдем выражение для тока на один из электродов верхней камеры

$$I(\varepsilon) = \frac{\pi^2 D \Delta \rho}{2((\varepsilon^2 + \pi^2)^{1/2} - \varepsilon)} \left\{ 1 - \exp \left[ -\frac{l}{2h} (\sqrt{\varepsilon^2 + \pi^2} - \varepsilon) \right] \right\}; \quad \varepsilon < l/2h.$$

Зависимость  $I(\varepsilon)$  имеет две области линейности:

$$0 < \varepsilon < 1 \quad I \simeq \frac{\pi D \Delta \rho}{2} + \frac{1}{2} V \Delta \rho h \simeq \frac{\pi D \Delta \rho}{2} + \frac{h^3 (\Delta \rho)^2 (k-1)}{12\nu l \rho} g,$$

$$3\pi < \varepsilon < (l/2h) \quad I \simeq \Delta \rho V h \simeq [h^3 (\Delta \rho)^2 (k-1) / 6\nu l \rho].$$

При  $\varepsilon \gg l/2h$  выражение для тока зависит от выбора распределения концентрации на входе в канал. Считая эту концентрацию постоянной и используя приближение пограничного слоя (3) для пуазейлевского профиля со средней скоростью  $V$ , получим

$$I \simeq 1,16 D \Delta \rho (Vh/D)^{1/2} (l/h)^{1/2} \simeq 0,93 \Delta \rho D [\Delta \rho (k-1) L l^4 g / Dh^2 \rho \nu]^{1/2}.$$

Заметим, что для поршневого профиля, взяв концентрацию на входе в виде  $\pi / 2 \Delta \rho \cos(\pi y / 2h)$ , получим, что ток выходит на постоянное значение, не зависящее от скорости

$$I \simeq \frac{\pi^2}{4} \Delta \rho D \frac{l}{h}.$$

В заключение несколько замечаний о нестационарном режиме. Пусть наша система пришла в стационарное состояние при некотором  $g$ , удовлетворяющем условию полного поглощения (6), а затем  $g$  мгновенно изменено на  $\Delta g$  таким образом, что  $g + \Delta g$  снова удовлетворяет этому условию. Непосредственно из выражений (5) следует, что перераспределения концентрации при этом не происходит; новое стационарное состояние отличается только величиной скорости. Скорость релаксирует с чисто гидродинамическим временем  $h^2/\nu$ . Время релаксации тока соответственно равно  $h^2/D$ .

Авторы благодарят Ю. А. Чизмадзе за участие в обсуждении результатов.

Поступило  
28 XII 1970

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, 1954. <sup>2</sup> М. Л. Фиш, А. И. Линецкий, М. М. Тютюников, Авт. свид. № 173488; Изобретения, промышленные образцы, товарные знаки, № 22, 194 (1968). <sup>3</sup> В. Г. Левич, Физико-химическая гидродинамика, 1952.