Доклады Академии наук СССР
1971. Том 199, № 4

УДК 519.21.9

МАТЕМАТИКА

С. В. НАГАЕВ, В. И. РОТАРЬ

ОБ ОЦЕНКАХ ТИПА ЛЯПУНОВА ДЛЯ СЛУЧАЯ БЛИЗОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СЛАГАЕМЫХ К НОРМАЛЬНОМУ

(Представлено академиком Ю. В. Линником 12 III 1971)

Пусть $\{X_j\}_{j=1}^n$ — последовательность независимых случайных величин (с. в.), $MX_j=0$, $MX_j^2=\sigma_j^2$, $B^2=\sum_{j=1}^n \sigma_j^2$, $M|X_j|^3=\mu_j<\infty$, $F_j(x)=P(X_j<x)$, $\Phi(x)=(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\,du$.

Пусть $\Delta(x)=P\left(\sum_{j=1}^n X_j<Bx\right)-\Phi(x)$ и $\delta=\sup_x|\Delta(x)|$. Символом L с индексами и без индексов будем обозначать абсолютные положительные постоянные.

Задача получения оценок величины δ, правая часть которых стремилась бы к нулю по мере приближения распределений слагаемых к нормальному, по-видимому, впервые рассматривалась в [1]. В частности, в [1] для пары распределений (F, G) была введена в рассмотрение величина

$$\tilde{\nu}^{(2)}(F, G)=\int_{-\infty}^{\infty}|x|\,|(F-G)|(dx),$$

названная r-м абсолютным псевдомоментом, и получена оценка

$$\delta\leqslant L_1[\tilde{\Lambda}/B^3]^{1/4}, \tag{1}$$

где $L_1\leqslant 0{,}28845$, $\tilde{\Lambda}=\sum_{j=1}^n\tilde{\nu}_j$, $\tilde{\nu}_j=\tilde{\nu}^{(3)}(F_j(x),\Phi(x/\sigma_j))$.

В [2] наряду с псевдомоментами $\tilde{\nu}^{(r)}$ рассматривалась иная характеристика распределений, лишь отсутствием множителя r отличающаяся от величины

$$\nu^{(r)}(F, G)=r\int_{-\infty}^{\infty}|x|^{r-1}|F(x)-G(x)|\,dx,$$

которую мы в дальнейшем будем называть r-м абсолютным разностным моментом пары (F, G). В [2], в частности, отмечалось, что

$$\nu^{(r)}(F, G)\leqslant\tilde{\nu}^{(r)}(F, G).$$

При оценке близости распределений двух сверток в метрике Леви в [2] было получено неравенство, отличающееся от (1) заменой псевдомоментов разностными моментами.

Оценки типа (1) являются точными в тех случаях, когда влияние на распределение суммы $\sum_{j=1}^n X_j$ отдельного слагаемого, например, X_1 велико по сравнению с влиянием оставшейся суммы $\sum_{j=2}^{n} X_j$. В других случаях оказываются более точными оценки иного типа. Так, в ([3]) для одинаково распределенных слагаемых при $\sigma_1 = 1$ была получена оценка

$$\delta \leqslant L_2 \frac{\max(\tilde{\nu}, \tilde{\nu}^{1/4})}{\sqrt{n}}, \tag{2}$$

где $\tilde{\nu} = \tilde{\nu}^{(3)}(F_j, \Phi)$.

Пусть $\nu_j = 3 \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 |F_j(x) - \Phi(x/\sigma_j)| \, dx$, $j = 1, \ldots, n$, — третьи разностные моменты пар $(F_j(x), \Phi(x/\sigma_j))$, $\Lambda = \sum_{j=1}^{n} \nu_j$, $C = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^3$. Справедлива

Теорема 1. *Существует абсолютная постоянная L_3 такая, что*

$$\delta \leqslant L_3 \max \{\Lambda / B^3; (\Lambda / B^3)^{1/4} (C / B^3)^{3/4}\}. \tag{3}$$

Поскольку всегда $C < B^3$, из (3) следует (1).

Положим теперь слагаемые одинаково распределенными и $\sigma_1 = 1$. Тогда из (3) легко получить (2). Отметим также, что, так как $\nu_j \leqslant \mu_j + 4\sigma_j^3 / \sqrt{2\pi}$ и $\sigma_j^3 \leqslant \mu_j$, из (3) следует хорошо известная оценка Берри — Эссеена (см., например, ([4])).

Теорема 2. *Пусть $B^2 / n = 1$ и $\nu = \Lambda / n$. Тогда если*

$$\min_j \sigma_j \geqslant \nu^{1/4},$$

то

$$\delta \leqslant 4{,}2 \nu^{1/4} / \sqrt{n}.$$

Теорема 3. *Пусть с.в. $\{X_j\}_{j=1}^{n}$ одинаково распределены,* $\sigma_1 = 1$, $\nu < 1$. *Тогда*

$$\delta \leqslant 6\nu^{1/3} / \sqrt{n} + 0{,}23 \exp\{-0{,}2n\} / n.$$

Следствие. *Для всех n таких, что* $\exp\{-0{,}2n\} / \sqrt{n} \leqslant \nu^{1/3}$,

$$\delta \leqslant 6{,}23 \nu^{1/3} / \sqrt{n}.$$

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
2 III 1971

Центральный экономико-математический институт
Академии наук СССР
Москва

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. М. Золотарев, Теория вероят. и ее примен., 11, 3 (1965). [2] В. М. Золотарев, ДАН, 190, № 5 (1970). [3] В. Паулаускас, Об одном усилении теоремы Ляпунова, Литовск. матем. сборн., 19, 2 (1969). [4] C. G. Esseen, Acta Math., 77, 1 (1945).