Доклады Академии наук СССР
1971. Том 199, № 4

УДК 518.5:681.142.2

МАТЕМАТИКА

В. А. НЕПОМНЯЩИЙ

О ПОЛНОТЕ ОПЕРАЦИЙ В ОПЕРАТОРНЫХ АЛГОРИТМАХ

(Представлено академиком Г. И. Марчуком 8 X 1970)

1. Известны такие уточнения интуитивного понятия алгоритма как рекурсивные функции, машины Тьюринга, нормальные алгоритмы, операторные алгоритмы ([1]). Последние наиболее близки к конструкциям, применяемым в программировании. Операторные алгоритмы определяются с помощью множеств переменных, соответствующих ячейкам памяти ЭВМ, и элементарных операций, соответствующих системам операций ЭВМ. Система элементарных операций полна, если с помощью этих операций можно запрограммировать (т. е. реализовать операторным алгоритмом) вычисление любой рекурсивной функции. В ([1]), теорема 1, установлена полнота системы операций над числами, состоящей из тождественной операции, добавления единицы и распознавания неравенства. Аналогичные результаты имеются в ([2–5]) для понятий алгоритма, родственных операторному. В ([5]), теорема 7.1, доказана полнота системы, состоящей из операций добавления и вычитания единицы и распознавания равенства нулю. Указанные полные системы операций минимальны в том смысле, что никакая их собственная подсистема не полна (теорема 7.4, ([5])). В ([5]), стр. 183, и ([6]), стр. 54, отмечается проблема нахождения критериев полноты произвольной системы операций. Известно (теорема 8.5, ([5])), что эффективных критериев полноты произвольной системы операций не существует. Однако неэффективные критерии также представляют интерес, поскольку их можно использовать при исследовании полноты конкретных систем операций. В настоящей работе изучаются частные случаи указанной проблемы для подкласса операторных алгоритмов, описываемых с помощью граф-схем из ([7]).

2. Основные понятия. Вначале опишем употребляемый нами подкласс операторных алгоритмов. Алгоритм $\mathfrak{A}$ строится с помощью конечных множеств переменных $X=\{x_1,\ldots,x_n\}$, операций $K=\langle f_1,\ldots,f_\mu; p_1,\ldots,p_\nu\rangle$, преобразователей П, распознавателей R, а также графа Г. Переменные принимают значения из $\overline{N}=\{0,1,2,\ldots\}$. Среди них выделяются входные $(x_{i_1},\ldots,x_{i^l})$ и выходная (x_s) переменные. Операции бывают двух типов: функциональные f_j $(j=1,\ldots,\mu)$ и предикатные p_j $(j=1,\ldots,\nu)$. *Функциональная операция* — это всюду определенная функция, отображающая наборы из $\overline{N}$ в $\overline{N}$. *Предикатная операция* — это предикат (не тождественно истинный и не тождественно ложный), который определен на наборах из $\overline{N}$ *. m-Местная $(m=1,2,\ldots)$ функциональная или предикатная операция g будет обозначаться $g\ (y_1,\ldots,y_m)$. *Преобразователь* — это выражение вида $x_m:=0$ или $x_\rho:=f_\eta(x_{j_1},\ldots,x_{j_\sigma})$, где $x_m, x_\rho, x_{j_1},\ldots,x_{j_\sigma}\in X, f_\eta(y_1,\ldots,y_\sigma)\in K$, $1\leqslant\eta\leqslant\mu$. *Распознаватель* — это выражение вида $P_\xi(x_{\varkappa_1},\ldots,x_{\varkappa^\lambda})$, где $x_{\varkappa_1},\ldots,x_{\varkappa_\lambda}\in X$, $P_\xi(y_1,\ldots,y_\lambda)\in K$, $1\leqslant\xi\leqslant\nu$. Г — это ориентированный граф, содержащий входную вершину (в которую не ведет ни одна стрелка и из которой выходит одна стрелка) и выходную вершину (из которой стрелки не выходят). Из остальных вершин Г выходит либо одна стрелка (вершины первого рода), либо две стрелки (вершины второго рода), причем в последнем случае одна из стрелок помечена

* Наши результаты не изменятся, если считать операциями только эффективные функции и предикаты.

символом $+$, а другая — символом $-$. Алгоритм $\mathfrak{R}$ задается множеством X, в котором отмечены входные и выходная переменные, а также графом Γ, каждой вершине первого рода которого сопоставлен преобразователь из Π, а второго рода — распознаватель из R. Алгоритму $\mathfrak{R}$ следующим образом сопоставляется частично определенная функция $\Phi_{\mathfrak{R}}(y_1, \ldots, y_l)$. Пусть $\langle a_1, \ldots, a_l \rangle$ — произвольный набор чисел из N. Определим вспомогательную последовательность $\langle \alpha_t, q_t \rangle$ $(t = 0, 1, 2, \ldots)$, где α_t — вершина Γ, а q_t — отображение X в N. $q_0(x_{i_k}) = a_k$ * для всех $k = 1, \ldots, l$ $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_l}$ — входные переменные); $q_0(x_j) = 0$ для всех $j = 1, \ldots, n$ таких, что $j \neq i_1$, $j \neq i_2, \ldots,$ $j \neq i_l$. Стрелка, выходящая из входной вершины Γ, ведет в α_0. Пусть $\langle \alpha_{t-1}, q_{t-1} \rangle$ уже определено. Возможны такие случаи. α_{t-1} сопоставлен (1) преобразователь $x_m := 0$, тогда $q_t(x_m) = 0$, $q_t(x_j) = q_{t-1}(x_j)$ для всех $j = 1, \ldots, m-1, m+1, \ldots, n$; (2) преобразователь $x_\rho := f_\eta(x_{j_1}, \ldots, x_{j_\sigma})$, тогда $q_t(x_\rho) = f_\eta(q_{t-1}(x_{j_1}), \ldots, q_{t-1}(x_{j_\sigma}))$, $q_t(x_k) = q_{t-1}(x_k)$ для всех $k = 1, \ldots, \rho - 1, \rho + 1, \ldots, n$; (3) распознаватель $P_\xi(x_{\varkappa_1}, \ldots, x_{\varkappa_\lambda})$, тогда $q_t(x_j) = q_{t-1}(x_j)$ для всех $j = 1, \ldots, n$. В случаях (1) и (2) стрелка, выходящая из α_{t-1}, ведет в α_t. В случае (3) стрелка, выходящая из α_{t-1} и помеченная символом $+$ (соответственно $-$), когда $P_\xi(q_{t-1}(x_{\varkappa_1}), \ldots, q_{t-1}(x_{\varkappa_\lambda}))$ — истина (соответственно ложь), ведет в α_t. Если α_{t-1} — выходная вершина Γ, то $\langle \alpha_\tau, q_\tau \rangle$ не определяется при $\tau > t - 1$, причем $\Phi_{\mathfrak{R}}(a_1, \ldots, a_l) = q_{t-1}(x_s)$, где x_s — выходная переменная. Если же, последовательность $\langle \alpha_t, q_t \rangle$ $(t = 0, 1, 2, \ldots)$ бесконечна, то $\Phi_{\mathfrak{R}}(a_1, \ldots, a_l)$ не определено. Система операций K называется **полной**, если для всякой частично рекурсивной функции $\varphi(y_1, \ldots, y_l)$ существует алгоритм $\mathfrak{R}$, построенный с помощью множества операций K, такой, что $\varphi(y_1, \ldots, y_l) = \Phi^{\mathfrak{R}}(y_1, \ldots, y_l)$ **. Обозначим $s(y) = y + 1$; $d(0) = 0$, $d(y) = y - 1$ при $y \geqslant 1$; $\mathscr{E}_c(y)$ $(c = 2, 3, 4, \ldots)$ — предикат «y делится на c без остатка»; $r(y)$ — предикат «y есть квадрат подходящего числа».

3. Необходимое условие полноты системы $\langle f(y); P(y) \rangle$. Пусть $f^0(y) = y$, $f^{j+1}(y) = f(f^j(y))$ $(j = 0, 1, 2, \ldots)$.

Теорема 1. *Пусть система операций $\langle f(y); P(y) \rangle$, где $f(y)$ — произвольная функция, а $P(y)$ — произвольный предикат, полна.*

Тогда (1) для всякого k $(k = 1, 2, \ldots)$ существует такое m $(m = 1, 2, \ldots)$, что $f^m(0) = k$;

*(2) для всякого y $(y = 0, 1, 2, \ldots)$ существует такое c $(c = 0, 1, 2, \ldots)$, что для любого y' $(y' = 0, 1, 2, \ldots)$ при $y' \neq y$ $(P(y) \neq P(y')) \vee (P(f(y)) \neq P(f(y'))) \vee (P(f^2(y)) \neq P(f^2(y'))) \vee \ldots \vee (P(f^c(y)) \neq P(f^c(y')))$ *** — истина.*

Следствие 1. *Пусть система операций $\langle f(y); P(y) \rangle$ полна. Тогда последовательность $\{f(0), f(1), f(2), \ldots, f(j), \ldots\}$ является перестановкой $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$.*

Предикат $P(y)$ назовем конечно-истинным, если существует такая постоянная c $(c = 1, 2, \ldots)$, что для каждого y при $y \geqslant c$ $P(y)$ — ложь.

Следствие 2. *Каковы бы ни были функция $f(y)$ и конечно-истинный предикат $\Omega(y)$, система операций $\langle f(y); \Omega(y) \rangle$ не полна.*

Пример 1. Из условия (2) теоремы 1 при $y = 0$, $y' = c$ $(c = 2, 3, \ldots)$ следует, что система операций $\langle s(y); \mathscr{E}_c(y) \rangle$ не полна.

4. Достаточное условие полноты системы $\langle f(y); P(y) \rangle$. Для предиката $P(y)$ обозначим через $\{P\}$ упорядоченную последовательность нулей и единиц $\{a(0), a(1), \ldots, a(i), \ldots\}$ такую, что $a(i) = 1$ тогда и только тогда, когда $P(i)$ — истина. $e_P = a(0)$. Конечную последовательность нулей и единиц β назовем отрезком (начальным отрезком) $\{P\}$,

* $q_t(x_j)$ — образ x_j при отображении q_t.

** Функции φ и $\Phi_{\mathfrak{R}}$ имеют одну и ту же область определения, в которой их значения совпадают.

*** $P(u) \neq P(v)$ — истина тогда и только тогда, когда $P(u)$ — истина (ложь), а $P(v)$ — ложь (истина).

если существуют последовательности γ, возможно, пустая, и δ такие, что $\{P\} = \{\gamma, \beta, \delta\}$ $(\{P\} = \{\beta, \delta\})$. Для не конечно-истинного предиката $P(y)$ (см. п. 3) обозначим через $\psi_P(z)$ функцию, которая определяется так. $\psi_P(0)$ — это число нулей в наибольшем начальном отрезке $\{P\}$, состоящем сплошь из нулей. $\psi_P(z)$ $(z = 1, 2, \ldots)$ — это число нулей, которые находятся в $\{P\}$ между z-й и $(z+1)$-й единицами (считая слева направо). Например, $\psi_{\mathscr{E}_c}(z) = c - 1$ $(z \geqslant 1)$, $\psi_{\mathscr{E}_c}(0) = 0$; $\psi_r(z) = 2(z-1)$ $(z \geqslant 1)$, $\psi_r(0) = 0$.

Теорема 2. *Пусть* (1) *функция* $f(y)$ *представима в виде* $f(y) = \mu i(\sigma(i) = \sigma(y) + 1)$ *, *где* $\sigma(y)$ *определяется с помощью подходящих чисел* k $(k = 1, 2, \ldots)$ и c $(c = 1, 2, \ldots)$ *следующим образом:* $\sigma(0) = 0$; $\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(k)\}$ — *произвольная перестановка* $\{1, \ldots, k\}$; $\{\sigma(k+1), \sigma(k+2), \ldots, \sigma(k+c)\}$ — *произвольная перестановка* $\{k+1, \ldots, k+c\}$; $\sigma(k+c+j) = c + \sigma(k+j)$ *для всякого* $j = 1, 2, \ldots$; (2) $\psi_P(z)$ *строго возрастает, начиная с некоторого* z.

Тогда система операций $\langle f(y); P(y)\rangle$ *полна.*

Пример 2. Из теоремы 2 при $k = 1$, $c = 1$ вытекает, что система операций $\langle s(y); r(y)\rangle$ полна.

Пример 3. Пусть $g(y) = y + 1$ $(y \geqslant 4)$, $g(0) = 2$, $g(1) = 4$, $g(2) = 3$, $g(3) = 1$. Из теоремы 2 при $k = 3$, $c = 1$, $\sigma(1) = 3$, $\sigma(2) = 1$, $\sigma(3) = 2$ вытекает, что система операций $\langle g(y); r(y)\rangle$ полна.

Пример 4. Пусть $h(y) = y + 1$ при нечетном y $(y \neq 0)$, $h(y) = y - 3$ при $y = 4 + 6j$ $(j = 0, 1, 2, \ldots)$, $h(y) = y + 3$ в остальных случаях. Из теоремы 2 при $k = c = 6$, $\sigma(1) = 3$, $\sigma(2) = 4$, $\sigma(3) = 1$, $\sigma(4) = 2$, $\sigma(5) = 5$, $\sigma(6) = 6$, $\sigma(6 + j) = 6 + \sigma(j)$ $(j = 1, \ldots, 6)$ вытекает, что система операций $\langle h(y); r(y)\rangle$ полна.

5. Критерий полноты системы $\langle s(y), d(y); P(y)\rangle$.

Теорема 3. *Система операций* $\langle s(y), d(y); P(y)\rangle$, *где* $P(y)$ — *произвольный предикат, полна тогда и только тогда, когда существуют такие начальный отрезок* $\{P\}$ β *и постоянная* k $(k = 1, 2, \ldots)$, *что* $\underbrace{e_P, \ldots, e_P}_{k}, \beta$ *не является отрезком* $\{P\}$ **.

Следствие 3. *Если система операций* $\langle s(y); P(y)\rangle$ (*не обязательно полная*) *удовлетворяет условию* (2) *теоремы* 1, *то система операций* $\langle s(y), d(y); P(y)\rangle$ *полна.*

Пример 5. Пусть $\pi(y)$ — предикат «y — простое число». Из теоремы 3 при $\beta = \{0, 0, 1, 1\}$, $k = 1$ вытекает, что система операций $\langle s(y), d(y); \pi(y)\rangle$ полна.

Пример 6. Из теоремы 3 при $\beta = \{1\}$, $k = c$ $(c = 2, 3, \ldots)$ вытекает, что система операций $\langle s(y), d(y); \mathscr{E}_c(y)\rangle$ полна.

Пример 7. Пусть $\mathscr{C}(y)$ — такой предикат, что $\{\mathscr{C}\} = \{\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots\}$, где $\gamma_0 = 0$, γ_i — последовательность нулей и единиц $a_{i1}, \ldots, a_{il_i}$, причем $a_{i1}a_{i2}\ldots a_{il_i}$ есть двоичная запись числа i $(i = 1, 2, \ldots)$. Заметим, что $\{\mathscr{C}\}$ — это пример Чемпернуона эффективной нормальной последовательности ([8]). Из теоремы 3 вытекает, что система операций $\langle s(y), d(y); \mathscr{C}(y)\rangle$ не полна.

Вычислительный центр
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
29 IX 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. П. Ершов, Проблемы кибернетики, в. 3, 5 (1960). [2] R. Peter, Dialectica, 12, 373 (1958). [3] H. Kaphengst, Zs. Math. Logik und Grund. Math., 5, 366 (1959). [4] J. C. Sheperdson, H. E. Sturgis, J. ACM, **10**, № 2, 217 (1963). [5] И. Д. Заславский, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, **72**, 99 (1964). [6] А. П. Ершов, А. А. Ляпунов, Кибернетика, № 5, 40 (1967). [7] Л. А. Калужнин, Проблемы кибернетики, в. 2, 51 (1959). [8] А. Г. Постников, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, **57** (1960).

* $\mu i(\sigma(i) = \sigma(y) + 1)$ означает наименьшее i, при котором справедливо $\sigma(i) = \sigma(y) + 1$.

** Обозначения и определения см. в п. 4.