Доклады Академии наук СССР
1971. Том 199, № 4

УДК 513.731 **МАТЕМАТИКА**

Член-корреспондент АН СССР А. В. ПОГОРЕЛОВ

РЕГУЛЯРНОЕ РЕШЕНИЕ n-МЕРНОЙ ПРОБЛЕМЫ МИНКОВСКОГО

Пусть F — выпуклая гиперповерхность в $(n+1)$-мерном эвклидовом пространстве. Гауссовой кривизной K гиперповерхности F в точке X называется предел отношения площади сферического изображения области G на гиперповерхности к площади области, когда область стягивается к точке X, т. е.

$$K(X) = \lim_{G\to X} \omega(G)/S(G). \tag{I}$$

Данное определение гауссовой кривизны не предполагает регулярности гиперповерхности. Если гиперповерхность регулярна (дважды дифференцируема), это определение приводит к известному выражению для гауссовой кривизны

$$K = 1/(R_1R_2\ldots R_n),$$

где $R_1, R_2, \ldots, R_n$ — главные радиусы кривизны гиперповерхности.

Проблема Минковского состоит в решении вопроса о существовании замкнутой выпуклой гиперповерхности, гауссова кривизна которой является заданной функцией внешней нормали ν, т. е. гиперповерхности, удовлетворяющей уравнению

$$R_1R_2\ldots R_n = \varphi(\nu) > 0. \tag{1}$$

Впервые эта проблема была решена самим Минковским. Он доказал существование замкнутой выпуклой гиперповерхности с заданной гауссовой кривизной $K = 1/\varphi(\nu)$ в смысле определения (I) для случая положительной непрерывной функции $\varphi(\nu)$, удовлетворяющей заведомо необходимому условию

$$\int_\omega \nu\varphi(\nu)\,d\omega = 0, \tag{2}$$

где интегрирование выполняется по площади единичной сферы сферического изображения гиперповерхности. В более общей постановке проблему Минковского рассматривали А. Д. Александров, Иенсен и Фенхель.

Недостаток всех полученных результатов, касающихся решения n-мерной проблемы Минковского при $n > 2$, состоит в том, что в них утверждается существование выпуклой гиперповерхности без каких-либо заключений о ее регулярности в зависимости от регулярности заданной функции $\varphi(\nu)$. Только при $n = 2$, т. е. для поверхностей трехмерного эвклидова пространства, проблема полностью решена (Г. Леви, Р. Качиополи, К. Миранда, Л. Ниренберг, А. В. Погорелов). Именно, установлена связь между степенью регулярности заданной функции $\varphi(\gamma)$ и регулярностью поверхности с гауссовой кривизной $1/\varphi(\nu)$. Целью настоящей работы является доказательство регулярности решения проблемы Минковского в предположении регулярности функции $\varphi(\nu)$ при $n > 2$.

Теорема 1. *Пусть на единичной сфере ω задана положительная, трижды дифференцируемая функция $\varphi(\nu)$ единичного вектора внешней нормали ν, удовлетворяющая условию* (2).

Тогда существует замкнутая регулярная, класса $C^{4,\alpha}$ $(0 < \alpha < 1)$ гиперповерхность F, удовлетворяющая уравнению (1).

Если левую часть уравнения (1) выразить через опорную функцию искомой гиперповерхности, то мы получим дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка для этой функции ([1]). Ввиду строгой выпуклости гиперповерхности это уравнение будет эллиптическим. Доказательство существования гиперповерхности сводится к доказательству существования решения этого уравнения. Как известно, для разрешимости эллиптического уравнения достаточно выполнения двух условий: 1) неограниченной разрешимости уравнения в вариациях, 2) существования априорных оценок для решения, его производных до второго порядка и их постоянных Гёльдера относительно положительного показателя.

Неограниченная разрешимость уравнения в вариациях так же, как и в случае $n = 2$, обеспечивается условием (2) на функцию φ. Существование априорных оценок решения и его производных до второго порядка обеспечивается априорной оценкой для радиусов нормальных кривизн ([1]). Таким образом, для доказательства теоремы 1 достаточно доказать существование априорной оценки постоянных Гёльдера вторых производных решения. Мы докажем существование априорных оценок для третьих производных. При этом условие 2) разрешимости проблемы с избытком выполняется и теорема 1 будет доказана.

Пусть $u(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ — выпуклая функция класса C^5, удовлетворяющая уравнению

$$\det\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^i\,\partial x^j}\right) = \Phi(x), \tag{3}$$

где $\Phi(x)$ — положительная функция переменных $x^1, x^2, \ldots, x^n$ класса C^3. К рассмотрению такого уравнения сводится n-мерная проблема Минковского ([1]). Обозначим

$$g_{ij} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^i\,\partial x^j}, \quad A_{ijk} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^3 u}{\partial x^i\,\partial x^j\,\partial x^k}.$$

При линейном преобразовании переменных x^i величины g_{ij} и A_{ijk} преобразуются как ковариантные тензоры.

Введем в рассмотрение риманову метрику, задаваемую линейным элементом $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$. Ввиду выпуклости функции $u(x)$ форма ds^2 положительно определенная. Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что величины $-A_{ijk}$ и $-A_{ij}^{\ k} = -g^{k\alpha}A_{ij\alpha}$ являются символами Кристоффеля первого и второго рода для метрического тензора g_{ij}. Дифференцируя уравнение (3), получаем соотношение

$$g^{ij}A_{ijk} = -\varphi_k, \tag{4}$$

где $\varphi_k = \partial \ln\sqrt{\Phi}/\partial x^k$.

Пользуясь известными формулами, находим тензор Римана

$$R_{ijkl} = g^{hm}(A_{hil}A_{mjk} - A_{hik}A_{mjl}). \tag{5}$$

Принимая во внимание соотношение (4), из выражения для тензора Римана (5) находим тензор Риччи R_{ik} и скалярную кривизну R. Имеем

$$R_{ik} = g^{jl}R_{ijkl} = \bar{R}_{ik} + g^{hm}A_{hik}\varphi_m, \quad \bar{R}_{ik} = g^{jl}g^{hm}A_{hil}A_{mjk}; \tag{6}$$

$$R = g^{ik}R_{ik} = \bar{R} + g^{hm}\varphi_h\varphi_m, \quad \bar{R} = A^{ijk}A_{ijk}. \tag{7}$$

Обозначим $\psi = \sqrt{\bar{R}} = (A^{ijk}A_{ijk})^{1/2}$.

Л е м м а. *Имеет место неравенство*

$$\Delta\psi \geqslant \frac{n+1}{n(n-1)}\psi^3 + c_1\psi^2 + c_2\psi + c_3 + c_0\left|\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|. \tag{8}$$

Здесь Δ — оператор Лапласа — Бельтрами, $|\partial\psi/\partial x|$ — максимум модулей первых производных ψ по x^k, а c_0, c_1, c_2 и c_3 оцениваются через вторые производные решения $u(x)$ уравнения (3) и производные функции $\varphi(x) = \ln\sqrt{\Phi(x)}$ до третьего порядка.

Для доказательства этой леммы воспользуемся некоторыми соображениями и результатами Е. Калаби ([2]). Прежде всего отметим следующее равенство, в правильности которого убеждаемся непосредственной проверкой:

$$\Delta\tilde{R} + A^{ijk}\varphi_{i,\,jk} = \tilde{R}_{ij}\tilde{R}^{ij} + R_{ijkl}R^{ijkl} + A_{ijk,\,\alpha}A^{ijk,\,\alpha}. \tag{9}$$

Здесь, как и всюду в дальнейшем, запятой отделяются индексы ковариантного дифференцирования.

Обозначим

$$B_{\alpha\beta\gamma ijkl} = {}^1/_2\,(A_{\alpha\beta\gamma,\,i}A_{jkl} - A_{\alpha\beta\gamma}A_{jkl,\,i}).$$

Непосредственно проверяется соотношение

$${}^1/_2\tilde{R}A_{\alpha\beta\gamma,\,i}A^{\alpha\beta\gamma,\,i} - {}^1/_8 g^{ij}\tilde{R}_{,\,i}\tilde{R}_{,\,j} = B_{\alpha\beta\gamma ijkl}B^{\alpha\beta\gamma ijkl}. \tag{10}$$

Составив выражение $\Delta\sqrt{\tilde{R}}$ и принимая во внимание соотношения (9) и (10), будем иметь

$$\Delta\sqrt{\tilde{R}} = \Delta\tilde{R}/(2\sqrt{\tilde{R}}) - g^{ij}\tilde{R}_{,\,i}\tilde{R}_{,\,j}/(4\tilde{R}) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\tilde{R}}}(\tilde{R}_{ij}\tilde{R}^{ij} + R_{ijkl}R^{ijkl} - A^{ijk}\varphi_{i,\,jk}) + \frac{2}{(\tilde{R})^{3/2}}B_{\alpha\beta\gamma ijkl}B^{\alpha\beta\gamma ijkl}. \tag{11}$$

Замечая, что $\sqrt{\tilde{R}} = \psi$, будем иметь

$$\tilde{R}_{ij}\tilde{R}^{ij} = R_{ij}R^{ij} + a_1\psi^3 + a_2\psi^2, \tag{12}$$

где a_1 и a_2 оцениваются в зависимости от вторых производных решения $u(x)$ уравнения (3) и производных первого порядка $\varphi(x)$;

$$A^{ijk}\varphi_{i,\,jk} = b_0\psi\,|\partial\psi/\partial x| + b_1\psi^3 + b_2\psi^2 + b_3\psi. \tag{13}$$

Коэффициенты b_0, b_1, b_2, b_3 оцениваются через вторые производные $u(x)$ и производные $\varphi(x)$ до третьего порядка.

В ([2]) доказано, что для положительно определенной римановой метрики

$$\frac{1}{n^2}R^2 \leqslant R_{ij}R^{ij}, \quad \frac{2}{n-1}R_{ij}R^{ij} \leqslant R_{ijkl}R^{ijkl}.$$

Отсюда следует, что

$$R_{ij}R^{ij} + R_{ijkl}R^{ijkl} \geqslant \frac{n+1}{n(n-1)}R^2 \geqslant \frac{n+1}{n(n-1)}\psi^4. \tag{14}$$

Теперь принимая во внимание (12) — (14), а также

$$B_{\alpha\beta\gamma ijkl}B^{\alpha\beta\gamma ijkl} \geqslant 0,$$

из соотношения (11) получаем неравенство, утверждаемое леммой.

Теорема 2. *Пусть $u(x)$ — выпуклая функция класса C^5, удовлетворяющая уравнению* (3) *в области G.*

Тогда в любой внутренней точке O области G третьи производные функции $u(x)$ оцениваются через вторые производные этой функции, правую часть уравнения и ее производные до третьего порядка и расстояние точки O до границы области G.

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать, что точка O является началом координат. Замечая, что

$$\Delta\psi = g^{\alpha\beta}\psi_{,\,\alpha\beta} = g^{\alpha\beta}\psi_{\alpha\beta} - g^{\alpha\beta}A^s_{\alpha\beta}\psi_s,$$

из неравенства (8) получаем

$$g^{\alpha\beta}\psi_{\alpha\beta} \geqslant \frac{n+1}{n(n-1)}\psi^3 + P_2(\psi) + c_0\left|\frac{\partial\psi}{\partial x}\right| + c_0'\psi\left|\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|, \tag{15}$$

где $P_2(\psi)$ — многочлен второй степени относительно ψ с коэффициентами, допускающими оценку.

Рассмотрим теперь функцию

$$w = \psi\lambda, \quad \lambda = \rho^2 - \sum_k (x^k)^2,$$

внутри шара ω с центром в точке O и радиусом ρ, равным расстоянию точки O до границы области G. Эта функция достигает максимума в некоторой точке M. В этой точке

$$w_\alpha = \partial w/\partial x^\alpha = 0, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, n.$$

Поэтому в точке M

$$\psi_\alpha = w(1/\lambda)_\alpha, \quad \psi_{\alpha\beta} = w_{\alpha\beta}/\lambda + w(1/\lambda)_{\alpha\beta}.$$

Подставляя эти значения ψ_α и $\psi_{\alpha\beta}$ в неравенство (15) и замечая, что в точке M $g^{\alpha\beta}w_{\alpha\beta} \leqslant 0$, получаем неравенство

$$\frac{n+1}{n(n-1)} w^3 + Q_2(w) \leqslant 0, \tag{16}$$

где $Q_2(w)$ — многочлен второй степени относительно w с коэффициентами, допускающими оценку.

Из неравенства (16) следует существование оценки для w. Если эту оценку обозначить через w_0, то оценка для ψ в точке O будет w_0/ρ^2. Так как

$$\psi = {}^1/_2 (g^{ir} g^{is} g^{kt} u_{ijk} u_{rst})^{1/2},$$

а форма $g^{\alpha\beta}du^\alpha du^\beta$ положительно определенная, то оценка для ψ обеспечивает оценки для третьих производных u_{ijk} функции $u(x)$.

Теорема 2 доказана.

Обратимся теперь к доказательству теоремы 1. Если гауссова кривизна как функция единичной нормали, является аналитической функцией, то априорные оценки для вторых и третьих производных опорной функции гарантируют существование аналитической гиперповерхности с заданной гауссовой кривизной. В случае, если гауссова кривизна является только трижды дифференцируемой, мы приближаем ее сначала аналитической функцией в метрике C^3, получаем соответствующую аналитическую гиперповерхность, а затем делаем предельный переход.

Априорные оценки третьих производных гарантируют регулярность класса $C^{2,1}$ предельной гиперповерхности, решающей проблему. Дальнейшая регулярность этой гиперповерхности (принадлежность классу $C^{4,\alpha}$ $(0 < \alpha < 1)$) следует из общей теоремы о регулярности решений уравнений эллиптического типа.

Из единственности обобщенного решения проблемы Минковского следует, что эта проблема не имеет других решений, кроме регулярных, если регулярна гауссова кривизна как функция внешней нормали.

Физико-технический институт низких температур
Академии наук СССР
Харьков

Поступило
12 IV 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. В. Погорелов, ДАН, 181, № 4 (1968). [2] E. Calabi, Michigan Math. J., 5, № 2 (1958).