Доклады Академии наук СССР
1971. Том 199, № 4

УДК 517.51:518.5

МАТЕМАТИКА

А. В. ТОГЕР

О СЛОЖНОСТИ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ КЛАССОВ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 1 II 1971)

1°. Работа посвящена оценкам порядка и асимптотике ε-сложности некоторых функциональных классов. Основные идеи в этом направлении принадлежат А. Н. Колмогорову ([1]).

Порядок ε-сложности компакта, составленного из k раз дифференцируемых функций, приведен в работе ([2]); там же получены нижние и верхние оценки ε-сложности (не совпадающие по порядку) компакта, составленного из аналитических функций.

2°. Напомним основные определения (см. ([1–4])).

Пусть $\{0, 1\}^n$ есть множество последовательностей, состоящих из n двоичных знаков. Отображение φ: $\{0, 1\}^n \to \{0, 1\}^m$ будем называть (n, m)-оператором. Каждый (n, m)-оператор может быть реализован автоматом, при этом

Определение 1. Автоматом (двоичным) называется тройка $D = (\Gamma, \Phi, h)$, где

1) $\Gamma = \Gamma_D$ есть связный ориентированный граф, не содержащий ориентированных циклов, и такой, что в каждую вершину Γ_D входит не более двух ребер. Подмножество S_0 множества вершин S, в которые не входят ребра графа, назовем входами D, а подмножество вершин S_1, из которых не выходят ребра графа, назовем выходами автомата D;

2) Φ есть множество функций алгебры логики не более, чем от двух переменных;

3) h есть взаимно однозначное соответствие между множеством Φ и множеством вершин $S \setminus S_0$ такое, что каждой вершине сопоставлена функция от переменных, число которых равно числу ребер, входящих в вершину.

На граф Γ_D можно смотреть как на схему суперпозиций, образованных из множества Φ (считая, что входам соотнесены аргументы $x_1, \ldots, x_n$). Получившийся в результате (n, m)-оператор обозначим через φ_D; (n, m)-оператор φ реализуется автоматом D, если $\varphi = \varphi_D$.

Сложностью $L(\varphi)$ (n, m)-оператора φ называется нижняя грань числа вершин графа Γ_D, взятая по всем автоматам D, реализующим φ.

Рассмотрим компакт $W \subset C(0, 1)$ функций таких, что $\|f\| \leqslant 1$. Зафиксируем $\varepsilon = 2^{-m}$ и разобьем отрезок $[0, 1]$ на частичные отрезки длины $\delta = 2^{-n}$. Выберем теперь наименьшее $n = n(\varepsilon, W)$ такое, что если x_1, x_2 — произвольная пара точек отрезка $[0, 1]$ с $\rho(x_1, x_2) \leqslant \delta$, то

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant \varepsilon/2.$$

Числовая функция, заданная в точках $i/2^n$, $i = 0, 1, \ldots, 2^n$, и принимающая значения в точках $j/2^m$, $j = 0, \pm 1, \ldots, \pm 2^m$, может быть рассмотрена как (n,m)-оператор φ.

Пусть $x \in [0, 1]$, а $\hat{x}$ — точка вида $i/2^n$ такая, что $\rho(x, \hat{x}) \leqslant \delta$. Через $\varphi_\varepsilon(\hat{x})$ будем обозначать (n, m)-оператор такой, что

$$|f(x) - \varphi_\varepsilon(\hat{x})| \leqslant \varepsilon$$

для любого $x \in [0, 1]$. Оператор φ_ε будем называть ε-равным непрерывной функции $f \in W$.

Определение 2. ε-Сложностью функции f называется величина

$$K_\varepsilon(f) = \sup L(\varphi_\varepsilon),$$

где верхняя грань взята по всем (n, m)-операторам φ_ε, ε-равным f.

Определение 3. ε-Сложностью компакта W называется величина

$$\mathscr{K}_\varepsilon(W) = \sup_{f \in W} K_\varepsilon(f).$$

3°. Для формулировки результата введем класс функций

$$W_M{}^\alpha = \{f\colon |f(x)| \leqslant 1, \ \ \omega_k(f; \tau) \leqslant Mh^\alpha, \ \ 0 < \alpha \leqslant k\},$$

где $\omega_k(f; \tau)$ есть k-модуль непрерывности, определяемый следующим образом:

$$\omega_k(f; \tau) = \sup_{0 \leqslant h \leqslant \tau} \|\Delta_h^k f\|_{C(0,\,1-kh)};$$

здесь $\Delta_h{}^k = \Delta_h{}^1(\Delta_h^{k-1})$ и $\Delta_h{}^1 f = f(x+h) - f(x)$.

В работах ([5-7]) описаны дифференциальные свойства функций класса $W_M^{(\alpha)}$ при различных k и α. Из этих работ следует, что

а) при $\alpha = k$ f имеет $k-1$ производную, для которой

$$|\Delta_h^1 f^{(k-1)}| \leqslant Mh;$$

б) при α дробном f имеет $[\alpha]$ производных, причем

$$|\Delta_h^1 f^{[\alpha]}| \leqslant C(\alpha)\, Mh^{\alpha-[\alpha]};$$

в) при целом $\alpha \neq k$ f имеет $s = \alpha - 1$ производную, для которой

$$|\Delta_h^2 f^{(s)}| \leqslant C(\alpha)\, Mh.$$

Основной результат этой заметки составляет

Теорема 1.

$$\mathscr{K}_\varepsilon(W_M^{(\alpha)}) \asymp (M/\varepsilon)^{1/\alpha}/\log(M/\varepsilon).*$$

Обозначим через $C_M{}^k$ класс k раз непрерывно дифференцируемых функций таких, что $\|f\|_C \leqslant 1$ и $\|f^{(k)}\|_C \leqslant M$. Имеем

Следствие (Ю. П. Офман).

$$\mathscr{K}_\varepsilon(C_M^k) \asymp (M/\varepsilon)^{1/k}/\log(M/\varepsilon).$$

Этот результат ранее был аонсирован в ([2]).

При $\alpha = k = 1$ результат теоремы 1 может быть уточнен.

Теорема 2.

$$\mathscr{K}_\varepsilon(W_M^{(1)}) = \frac{M}{\varepsilon \log(M/\varepsilon)}\left(1 + O\left(\frac{\log\log(M/\varepsilon)}{\log(M/\varepsilon)}\right)\right).$$

Доказательства обеих теорем опираются на некоторые специальные способы построения ε-сетей (см. ([8], [9])) и принцип локального кодирования О. Б. Лупанова ([10]).

Замечание 1. Теорема 1 может быть распространена и на случай функций многих переменных, имеющих различные дифференциальные свойства по разным переменным или по разным группам переменных. Подобные классы функций изучались в ([9]) с точки зрения порядков роста их ε-энтропии.

---

* Всюду в этой заметке логарифмы взяты по основанию 2.

З а м е ч а н и е 2. Сравнивая полученные в этом n° оценки ε-сложности с оценками ε-энтропии соответствующих функциональных классов, замечаем, что они могут быть записаны в форме

$$\mathcal{K}_\varepsilon(W) \asymp H_\varepsilon(W)/\log H_\varepsilon(W), \tag{1}$$

где $H_\varepsilon(W)$ обозначает ε-энтропию компакта W.

Было бы интересно описать возможно более широкий класс компактов $W \subset C(0, 1)$, для которых имеет место (1).

В заключение приношу искреннюю благодарность Ю. А. Брудному и Б. Д. Котляру за руководство этой работой.

Днепропетровский химико-технологический институт

Поступило
11 I 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] A. N. Kolmogorov, Proc. Intern. Congr. Math., 1963, p. 351. [2] Ю. П. Офман, ДАН, 152, № 4, 823 (1963). [3] C. E. Shannon, Bell. Syst. Techn. J., 28, 1, 59 (1949). [4] О. Б. Лупанов, Проблемы кибернетики, в. 7, М., 1961, стр. 60. [5] A. Marchaud, J. Math. pures et appl., 6, 337 (1927). [6] Д. А. Райков, ДАН, 24, № 7, 652 (1939). [7] Ю. А. Брудный, И. Е. Гопенгауз, ДАН, 141, № 6, 1283 (1961). [8] А. Н. Колмогоров, В. М. Тихомиров, УМН, 14, в. 2 (86), 3 (1959). [9] Ю. А. Брудный, Б. Д. Котляр, ДАН, 148, № 5, 1001 (1963). [10] О. Б. Лупанов, Проблемы кибернетики, в. 14, М., 1964, стр. 31.