Доклады Академии наук СССР
1971. Том 198, № 1

УДК 513.731

МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент АН СССР А. В. ПОГОРЕЛОВ

ПРИМЕР ДВУМЕРНОЙ РИМАНОВОЙ МЕТРИКИ, НЕ ДОПУСКАЮЩЕЙ ЛОКАЛЬНОЙ РЕАЛИЗАЦИИ В E_3

Целью настоящей заметки является построение примера двумерной римановой метрики, не допускающей даже в «малом» дважды дифференцируемого изометрического погружения в трехмерное эвклидово пространство. Для простоты изложения отметим некоторые свойства поверхностей, используемые при построении примера.

1. Пусть $z(x, y)$ — выпуклая дважды дифференцируемая функция в прямоугольнике $-c \leqslant x \leqslant c$, $0 \leqslant y \leqslant b$, удовлетворяющая условиям: 1) на отрезке $-c \leqslant x \leqslant c$ оси x $dz \equiv 0$; 2) всюду в прямоугольнике $m \leqslant \partial^2 z / \partial y^2 \leqslant M$. Тогда на отрезке $-c \leqslant x \leqslant c$, $y = b$ найдется точка, в которой $\partial^2 z / \partial x^2$ не больше $(M - m) b^2 / c^2$.

2. Пусть в выпуклой области G задана дважды дифференцируемая функция $z(x, y)$, удовлетворяющая условию

$$\Delta = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y}\right)^2 \geqslant 0.$$

Тогда, если множество тех точек области G, где $\Delta > 0$, связано и содержит границу области G, то $z(x, y)$ — выпуклая функция.

3. Пусть F: $z = z(x, y)$ — дважды дифференцируемая поверхность и G — внутренне выпуклая область на ней. Тогда, если геодезическая кривизна края области G достаточно велика, то область G проектируется на плоскость xy в выпуклую область. Необходимое значение геодезической кривизны оценивается через максимум модулей первых и вторых производных функций $z(x, y)$.

4. Пусть G — строго выпуклая область на дважды дифференцируемой выпуклой поверхности. Тогда, если гауссова кривизна поверхности в области G равна нулю, то в этой области можно указать прямолинейные отрезки сколь угодно малой длины с концами на границе области G.

5. Введем на плоскости полярные координаты ρ, ϑ и зададим в круге $\rho \leqslant a < 1$ риманову метрику линейным элементом $ds_a^2 = d\rho^2 + G(\rho) d\vartheta^2$, где $G(\rho)$ определяется условиями

$$\sqrt{G} = \begin{cases} \rho & \text{при } \rho \leqslant a/2, \\ \rho + a(a-\rho)^3 \left(\dfrac{a}{2} - \rho\right)^3 & \text{при } \dfrac{a}{2} \leqslant \rho \leqslant a. \end{cases}$$

Заданная метрика в круге $\rho \leqslant a/2$ совпадает с метрикой плоскости ρ, ϑ. При достаточно малом ε в кольце $a/2 < \rho < a/2 + \varepsilon$ гауссова кривизна положительна и больше $3(\rho - a/2)$.

6. Пусть S: $z = z(x, y)$ — дважды дифференцируемая поверхность и G — ограниченная область на ней. Обозначим через M_ε риманову метрику, задаваемую линейным элементом ds_a^2 в круге $\rho \leqslant a/2 + \varepsilon$. Величина ε определяется требованием неотрицательности гауссовой кривизны. Тогда при достаточно малом a метрика M_ε не может реализоваться на поверхности S в области G.

Допустим, утверждение неверно, и существует часть F поверхности S, принадлежащая G, которая имеет метрицу M_ε. Поверхность F при достаточно малом a выпуклая (пп. 2, 3). Обозначим через G_0 область на поверхности F, определяемую условием $\rho < a/2$. Область G_0 выпуклая, и гауссова кривизна в этой области всюду равна нулю. Возьмем в области G_0 прямолинейную образующую g достаточно малой длины с концами на границе G_0 (п. 4). Примем касательную плоскость вдоль образующей g за плоскость xy, а саму образующую за отрезок $(-c, c)$ оси x. Ввиду малости a поверхность F при таком выборе системы координат задается уравнением вида $z = z(x, y)$. На отрезке $(-c, c)$ оси x $dz \equiv 0$.

Согласно п. 1, на отрезке, параллельном g и отстоящем от него на расстоянии b, найдется точка $\bar{P}$, в которой $|z_{xx}|$ не больше $(M - m)b^2/c^2$, где M и m — соответственно максимум и минимум z_{yy} в прямоугольнике $-c \leqslant x \leqslant c$, $0 \leqslant y \leqslant b$. По непрерывности производной z_{yy}, малых b и c $M - m$ сколь угодно мало. Таким образом, в точке $\bar{P}$ $|z_{xx}| < \varepsilon' b^2/c^2$, где ε' мало вместе с b и c.

Обозначим через P точку поверхности F, которая проектируется в точку $\bar{P}$ плоскости xy. Возьмем $b = c^2/a$. Ввиду малости a при таком b точка P будет вне области G_0 на расстоянии, не меньшем $c^2/(3a)$, от геодезического круга $\rho = a/2$. Поэтому гауссова кривизна в точке P не меньше $3(c^2/(3a)) = c^2/a$. Так как в точке $\bar{P}$ $|z_{xx}| < \varepsilon' c^2/a^2$, то максимум нормальной кривизны в точке P не меньше a/ε'. Но при $c \to 0$ $\varepsilon' \to 0$, и мы приходим к противоречию. Утверждение доказано.

7. Построим теперь пример метрики класса $C^{2,1}$, не допускающей даже локально реализации на поверхности класса C^2. Обозначим через ω_n круг с центром $(1/n, 0)$ и радиусом $1/[2(n+1)^2]$. Круги ω_n попарно не пересекаются. При $n \to \infty$ их центры сходятся к точке $O(0, 0)$, а радиусы стремятся к нулю. В каждом круге ω_n зададим риманову метрику, как это сделано в п. 5. Заданную в кругах ω_n метрику продолжим метрикой плоскости, на которой расположены круги. Построенная таким образом риманова метрика принадлежит классу $C^{2,1}$. Покажем, что она не реализуется ни в какой окрестности точки O.

Допустим, в некоторой окрестности G точки O метрика реализуется поверхностью F класса C^2. Пусть $\bar{O}$ — точка на поверхности F, соответствующая точке O. Представим поверхность F в окрестности точки $\bar{O}$ уравнением вида $z = z(x, y)$, приняв касательную плоскость в точке $\bar{O}$ за плоскость xy, а точку $\bar{O}$ — за начало координат. Обозначим эту окрестность через F'. При достаточно большом n метрика, заданная в круге ω_n, реализуется на поверхности F'. Однако, как показано в п. 6, это невозможно. Итак, построенная метрика ни в какой окрестности точки O не допускает дважды дифференцируемой реализации.

8. Важно заметить, что точка O является единственной точкой, в окрестности которой заданная метрика не допускает реализации дважды дифференцируемой поверхностью. В достаточно малой окрестности любой другой точки построенная метрика не только реализуется поверхностью класса C^2, но даже поверхностью класса $C^{2,1}$, т. е. поверхностью $z = z(x, y)$, у которой функция $z(x, y)$ дважды дифференцируема со вторыми производными, удовлетворяющими условию Липшица.

Физико-технический институт низких температур
Академии наук УССР
Харьков

Поступило
4 I 1971