

Член-корреспондент АН СССР В. С. ПУГАЧЕВ

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ ДЛЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СОСТОЯНИЙ СИСТЕМЫ

В теории массового обслуживания и в динамике средних обычно пользуются дифференциальными уравнениями А. Н. Колмогорова для вероятностей состояний системы с конечным или счетным множеством возможных состояний ⁽¹⁾, предполагая, что процесс изменения состояния системы является марковским случайным процессом (процессом без последействия) и в соответствии с этим все потоки переходов системы из одного состояния в другое являются пуассоновскими. При таком допущении, в частности, были выведены известные уравнения и формулы Эрланга в теории массового обслуживания ^(2, 3). В дальнейшем было обнаружено, что формулы Эрланга справедливы не только при показательном распределении времени обслуживания, которому соответствует пуассоновский поток освобождения каналов системы ^(4, 5). Б. А. Севастьянов и А. Я. Хинчин доказали, что формулы Эрланга справедливы при произвольном распределении времени обслуживания, если входной поток является простейшим ^(6, 7). Однако, как это ни удивительно, по-видимому, до сих пор осталось незамеченным, что дифференциальные уравнения А. Н. Колмогорова для вероятностей состояний системы справедливы не только для марковских случайных процессов, но и для широкого класса процессов с последствием. Покажем это.

Рассмотрим систему с конечным или счетным множеством состояний M . Обозначим $p_i = p_i(t)$ вероятность i -го состояния, $i \in M$. Для любых двух бесконечно близких моментов времени t и $t + \Delta t$ согласно формуле полной вероятности справедливо соотношение

$$p_i(t + \Delta t) = \sum_{j \in M} p_j(t) p_{ji}(t, t + \Delta t), \quad (1)$$

где $p_{ji}(t, t + \Delta t)$ — условная вероятность перехода системы, находящейся в i -м состоянии в момент t , в j -е состояние к моменту $t + \Delta t$. Для того чтобы получить из (1) дифференциальные уравнения для вероятностей состояний системы, достаточно предположить, что существуют конечные пределы

$$\lambda_{ji} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_{ji}(t, t + \Delta t)}{\Delta t}, \quad i \neq j; \quad i, j \in M, \quad (2)$$

которые могут быть постоянными или функциями времени t . Принимая это допущение, получаем из (1) обычным путем дифференциальные уравнения

$$\dot{p}_i = \sum_{j \in M} \lambda_{ji} p_j, \quad i \in M, \quad (3)$$

где

$$\lambda_{ii} = - \sum_{\substack{k \in M \\ k \neq i}} \lambda_{ik}, \quad i \in M, \quad (4)$$

а точкой обозначено дифференцирование по времени t *.

* В случае счетного множества состояний M для строгого вывода уравнений (3) естественно добавить требование равномерной сходимости к пределу в (2) относительно j при любом i и равномерной сходимости относительно Δt ряда, полученного делением ряда (1) на Δt ⁽¹⁾.

Из уравнений (3) вытекают, в частности, дифференциальные уравнения для вероятностей состояний системы массового обслуживания с отказами (уравнения Эрланга) и с очередью. На основании изложенного эти уравнения справедливы при любом ординарном входном потоке и при произвольных распределениях времени обслуживания и времени ожидания *. Из этих дифференциальных уравнений при постоянных интенсивностях потоков вытекают существование стационарного распределения вероятностей состояний системы и определяющие это распределение формулы Эрланга и их обобщения на системы с очередью. Таким образом, формулы Эрланга и их обобщения справедливы не только для любых распределений времени обслуживания и времени ожидания, но и для любых ординарных стационарных входных потоков, что до сих пор было, по-видимому, не известно. Следует, однако, отметить, что в случае непуассоновского входного потока вероятность того, что все каналы или все места в очереди заняты, не совпадает с вероятностью отказа. Вероятность отказа в этом случае должна вычисляться другим путем.

Заметим, что уравнения (3) в общем случае справедливы только для безусловных вероятностей состояний системы, в то время как для марковского процесса, т. е. при пуассоновских потоках переходов, они справедливы и для переходных вероятностей $p_{ii}(\tau, t)$ при любых фиксированных $i \in M$ и $\tau < t$.

Существование конечных пределов (2) достаточно для того, чтобы изменение вероятностей состояний системы описывалось уравнениями (3). Однако существование конечных пределов (2) отнюдь не необходимо для справедливости уравнений (3). В действительности они справедливы и в том случае, когда пределы (2) существуют как обобщенные функции, содержащие линейные комбинации импульсных δ -функций. Так, например, если в определенный момент τ система с вероятностью $\alpha \neq 0$ переходит из j -го состояния в i -е, то λ_{ji} содержит слагаемое $\alpha \delta(t - \tau)$. При этом, как следует из уравнений (3), в момент τ вероятность p_i скачком увеличивается на $\alpha p_j(\tau)$, а вероятность p_j скачком уменьшается на $\alpha p_j(\tau)$. В частности, при $\alpha = 1$ вероятность p_j изменяется в момент τ скачком до нуля, а вероятность p_i скачком увеличивается на $p_j(\tau)$. Таким образом, уравнения (3) применимы и к полностью детерминированным системам, в которых переходы из одного состояния в другое происходят в строго определенные моменты времени. В этом случае все величины λ_{ji} представляют собой суммы δ -функций с особенностями в определенных точках. Из уравнений (3) следует, что в этом случае при любом начальном распределении вероятностей в системе с конечным множеством состояний по истечении некоторого конечного времени устанавливается строго детерминированный процесс, когда в каждый данный момент вероятность одного определенного состояния равна единице, а вероятности остальных состояний равны нулю. В момент времени, когда соответствующая δ -функция имеет особенность, вероятность состояния, в котором система перед этим находилась, изменяется скачком до нуля, а вероятность состояния, в которое система переходит, становится равной единице. Условие существования пределов (2) как обобщенных функций, очевидно, необходимо для того, чтобы уравнения (3) описывали изменение вероятностей состояний системы.

Институт проблем управления
(автоматики и телемеханики)

Поступило
4 II 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ A. N. Kolmogorov, Math. Ann., 104, 415 (1931). ² А. Я. Хинчин, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова, 49 (1955). ³ Б. В. Гнеденко, И. Н. Коваленко, Введение в теорию массового обслуживания, «Наука», 1966. ⁴ K. Lundkvist, Ericsson Technics, 9, № 2 (1953). ⁵ R. M. Fortet, Proc. Berkley Symp. Math., Stat. and Prob., 2 (1956). ⁶ Б. А. Севастьянов, Теор. вероятн. и ее прим., 2, № 1 (1957). ⁷ А. Я. Хинчин, там же, 7, № 3 (1962).

* При условии, что эти величины имеют конечные математические ожидания.