Доклады Академии наук СССР
1971. Том 198, № 1

УДК 519.1 *МАТЕМАТИКА*

П. С. СОЛТАН, К. Ф. ПРИСАКАРУ

ЗАДАЧА ШТЕЙНЕРА НА ГРАФАХ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 20 XI 1970)

1. Пусть X — некоторое метрическое пространство. Множество $M \subset X$ будем называть выпуклым в X, если из соотношений $x_1 \in M$, $x_2 \in M$, $d(x_1, x_2) = d(x_1, x_3) + d(x_3, x_2)$ вытекает, что $x_3 \in M$. Пусть $p(y)$ — действительная положительная функция, заданная на конечном подмножестве $Y \subset X$, а M — замкнутое выпуклое множество пространства X. Нас интересует

Задача Штейнера [5]. *Отыскать в M такую точку x_*, чтобы она минимизировала функционал*

$$F(x) = \sum_{y \in Y} p(y) d(x, y).$$

Так как нам придется рассматривать эту задачу в различных метрических пространствах, причем в одном и том же пространстве для разных M и Y, то мы условимся сформулированную выше задачу называть задачей XMY. Рассмотрение задачи XMY при наложении определенных ограничений на пространство X и множество M проведено в работах [3–6]. Нас будет интересовать случай, когда множество X конечно, а метрика в нем задается с помощью некоторого графа.

2. Пусть $G = (X, U)$ — конечный связный неориентированный граф [1], и пусть на множестве U определена действительная функция $l(u) > 0$. Положим для любых $x_1, x_2 \in X$

$$d(x_1, x_2) = \min_{c \in C} \sum_{u \in c} l(u),$$

где C — множество всех цепей [1], соединяющих x_1 и x_2. Без труда проверяется, что d есть метрика в X. Именно, для таких метрических пространств мы и будем рассматривать задачу XMY — задачу Штейнера на графах.

Цель настоящей заметки — указать класс графов со специальной функцией l, для которых задача XMY решается сравнительно просто.

Излагаемое ниже решение задачи Штейнера не использует расстояния d.

3. Рассматриваемый граф $G = (X, U)$ мы будем предполагать реализованным на плоскости [1]. Через Φ обозначим множество граней, определяемых графом G, т. е. замкнутых ограниченных областей, которые вырезаются на плоскости графом G. На граф G и функцию l, определенную на U, накладываются условия:

1^0. Пересечение любых двух различных граней либо пусто, либо есть вершина $x \in X$, либо есть ребро $u \in U$.

2^0. Каждая грань является (вообще говоря, криволинейным) четырехугольником.

3^0. Если вершина $x \in X$ является внутренней, т. е. не лежит на границе бесконечной грани, определенной на плоскости графом G, то к x примыкают более трех ребер графа G.

4^0. Если $u_1, u_2 \in U$ являются противоположными сторонами какой-либо грани $\Gamma \in \Phi$, то $l(u_1) = l(u_2)$.

Класс графов G с функцией l, удовлетворяющих условиям 1^0—4^0, и есть искомый.

4. Теперь изложим основные положения, на которых основан алгоритм решения задачи XMY для случая, когда граф G с функцией l принадлежит описанному классу. Прежде всего введем определение: ребра $u, u' \in U$ условимся считать эквивалентными, если существует такая последовательность ребер $u = u_1, u_2, \ldots, u_k = u'$, что при любом $i = 1, 2, \ldots, k-1$ ребра u_i и u_{i+1} являются двумя противоположными сторонами некоторой грани из Φ или $u = u'$. Это есть отношение эквивалентности, и оно разбивает множество U на классы эквивалентности, которые мы обозначим через $U_1, U_2, \ldots, U_n$ (заметим, что $U_1, U_2, \ldots, U_n$ являются разрезами в смысле теории графов ([1])). Множество $\{1, 2, \ldots, n\}$, т. е. множество индексов, указывающих классы $U_1\ U_2, \ldots, U_n$, обозначим через $\mathcal{U}$.

Перейдем теперь к описанию решения задачи XMY.

A. Рассмотрим задачу XXX. Пусть x_k, x_i — две вершины графа G, и U_j — один из классов эквивалентности, рассмотренных выше. Пусть c — некоторая цепь, соединяющая вершины x_k и x_i. Положим $t_{ki}^j = 0$, если цепь c содержит четное число ребер, принадлежащих U_j, и $t_{ki}^j = 1$, если она содержит нечетное число таких ребер. Число t_{ki}^j, определенное таким образом, не зависит (теорема A) от выбора цепи c, т. е. однозначно определяется индексами k, i, j. Положим, далее,

$$s_k^j = \sum_{i=1}^{m} p(x_i)\,(1 - 2t_{ki}^j),$$

где m — мощность $|X|$ множества X, и введем в рассмотрение числа r_k^j, полагая

$$r_k^j = \begin{cases} 0, & \text{если } s_k^j < 0, \\ 1, & \text{если } s_k^j > 0, \\ 0 \text{ или } 1 \text{ (безразлично)}, & \text{если } s_k^j = 0. \end{cases}$$

Теперь каждой вершине $x_k \in X$ мы можем сопоставить отображение α_k: $X \to \mathbf{R}^n$ ($\mathbf{R}^n$ — арифметическое n-мерное пространство), полагая $\alpha_k(x_i) = (t_{ki}^1, t_{ki}^2, \ldots, t_{ki}^n)$, и отображение β_k: $\mathcal{U} \to \mathbf{R}^m$, полагая $\beta_k(j) = (t_{k1}^j, t_{k2}^j, \ldots, t_{km}^j)$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Далее, обозначим через T_k множество всех точек $(r_k^1, r_k^2, \ldots, r_k^n) \in \mathbf{R}^n$, а через S_k обозначим множество всех точек $(t_{k1}^j, t_{k2}^j, \ldots, t_{km}^j) \in \mathbf{R}^m$, соответствующих таким индексам j, k, что $s_k^j = 0$. Наконец через X^A обозначим множество всех решений задачи XXX (т. е. тех точек $x \in X$, в которых функционал $F(x) = \sum_{y \in X} p(y)\,d(x, y)$ достигает минимума), а через $\mathcal{U}^A$ — множество всех тех индексов $j \in \mathcal{U}$, для которых существует такое ребро $u = (x', x'')$ графа G, что $u \in U_j$, и $F(x') = F(x'')$.

Теорема A. *Отображения α_k и β_k инъективны. Далее, для любого $k = 1, 2, \ldots, m$ справедливы соотношения*

$$T_k \subset \alpha_k(X), \quad \alpha_k^{-1}(T_k) = X^A, \quad \beta_k^{-1}(S_k) = \mathcal{U}^A, \quad |X^A| = 2^{|\mathcal{U}^A|}.$$

Эта теорема делает решение задачи XXX совершенно ясным.

B. Рассмотрим теперь задачу XXY. Определим на X функцию $p^*(x)$, положив

$$p^*(x) = \begin{cases} p(x) + \varepsilon & \text{при } x \in Y, \\ \varepsilon & \text{при } x \notin Y, \quad \varepsilon < \dfrac{1}{m\,|U|}\left(\min\limits_{x_i \in Y} \{p(x_i)\}\right). \end{cases}$$

Далее, обозначим через X_*^A множество всех решений задачи XXX с новой функцией $p^*(x)$, а через X^B — множество решений первоначальной задачи XXY.

Теорема B. *Справедливо включение* $X_*^A \subset X^B$.

Таким образом, решая задачу XXX (на основании теоремы A), мы тем самым найдем некоторые решения (хотя бы одно) и первоначальной задачи XXY.

C. Наконец, рассмотрим задачу XMY. Пусть X^C — множество решений этой задачи. Прежде всего ясно, что если $\alpha_k(X^B) \cap \alpha_k(M) \neq \phi$, то $X^C = X^B \cap M$. Поэтому нужно лишь рассмотреть случай, когда $\alpha_k(X^B) \cap \cap \alpha_k(M) = \phi$. Положим для любых двух вершин $x_e, x_i \in X$

$$\|\alpha_k(x_i) - \alpha_k(x_e)\| = \sum_{j \in \mathcal{U}} |t_{ki}^j - t_{ke}^j|.$$

Теорема C. *Если* $\alpha_k(X^B) \cap \alpha_k(M) = \phi$, *то для произвольной точки* $x_* \in X^B$ *и любого* $k = 1, 2, \ldots, m$ *найдется в* M *такая точка* $\tilde{x}$, *что* $\|\alpha_k(x_*) - \alpha_k(\tilde{x})\| = \min_{x \in M} \|\alpha_k(x_*) - \alpha_k(x)\|$. *При этом точка* $\tilde{x}$ *однозначно определяется точкой* x_* *и удовлетворяет включению* $\tilde{x} \in X^C$.

5. Идеи, лежащие в основе доказательств теорем A, B, C, заключаются в следующем.

Лемма 1. *Пусть* K — *двумерный клеточный комплекс* ([2]), *грани которого удовлетворяют условиям* 1^0 *и* 2^0 *пункта 3 и для которого соответствующий полиэдр* $\bar{K}$ *гомеоморфен двумерной сфере.*

Тогда найдется в K *такая вершина, к которой примыкают ровно 3 ребра.*

Пусть комплекс K_G состоит из всех вершин и ребер графа G рассматриваемого класса и всех граней $\Gamma \in \Phi$. Обозначим через G_j подкомплекс ([2]) комплекса K_G, содержащий все ребра из U_j, а также все инцидентные им клетки (нульмерные и двумерные).

Лемма 2. *Для любого* $j \in \mathcal{U}$ *полиэдр* $\bar{C}_j$ *односвязен* ([2]).

Лемма 3. *Для любого* $j \in \mathcal{U}$ *граф* $G_j = (X, U \setminus U_j)$ *состоит в точности из двух компонент связности.*

Змейкой назовем такой связный одномерный комплекс З, не содержащий циклов, что к каждой его вершине примыкает не более двух одномерных клеток.

Лемма 4. *Для любых различных* $j_1, j_2 \in \mathcal{U}$ *пересечение* $C_{j1} \cap C_{j2}$ *исчерпывается одним из случаев*: ϕ, $x \in X$, $З \subset K_G$ $\Gamma \in \Phi$.

Лемма 5. *Для любых различных* $j_1, j_2, j_3 \in \mathcal{U}$ *имеем, что из множеств* $C_{j_1}, C_{j_2}, C_{j_3}$ *не более двух пар пересекаются по элементу из* Φ.

Пусть x_k и x_i — некоторые вершины графа G, c — произвольная цепь, соединяющая их, а t_{ki}^j — наименьшее из неотрицательных целых чисел, удовлетворяющее соотношению $|U_j \cap C| \equiv t_{ki}^j (\mathrm{mod}\, 2)$.

Теорема 1. *Существуют (и притом однозначно определены) такие числа* d_j, $j \in \mathcal{U}$, *что для произвольных вершин* x_k *и* x_i *графа* G *расстояние* $d(x_k, x_i)$ *удовлетворяет соотношению*

$$d(x_k, x_i) = \sum_{j \in \mathcal{U}} d_j t_{ki}^j.$$

Если $G' = (X', U')$ — некоторый подграф графа G, то через $p(G')$ мы будем обозначать число $\sum_{x \in X'} p(x)$. Согласно лемме 3, граф $G_j = (X, U \setminus U_j)$ состоит из двух компонент G_j' и G_j''. Через $\mathcal{U}_A$ мы обозначим множество всех индексов $j \in \mathcal{U}$, для которых $p(G_j') = p(G_j'')$.

Теорема 2. *Множества* $\mathcal{U}_A$ *и* $\mathcal{U}^A$ *совпадают. При этом выполняются соотношения* $|\mathcal{U}_A| \leqslant 2$, $|X^A| = 2|\mathcal{U}_A|$.

Теорема 3. *Множество* X^A *полностью исчерпывается нульмерными клетками, инцидентными некоторой клетке комплекса* K_G.

Доказательство этих теорем осуществляется при помощи лемм 1 — 5.

Пусть $\mathbf{R}^n$ — действительное n-мерное линейное пространство с нормой

$|y| = \sum_{j=1}^{m} |y^j|$, а $P^n = \{y\colon 1 \leqslant y^j \leqslant d_j\}$ — параллелепипед в $\mathbf{R}^n$. Рассматривая P^n как клеточный комплекс, элементами которого являются грани параллелепипеда P^n, мы выделим его одномерный остов (P_0, P_1), где P_0 и P_1 — соответственно множества нульмерных и одномерных клеток. На основе теоремы 1 легко заметить, что существует метрический изоморфизм φ_k графа $G = (X, U)$ с функцией l в граф (P_0, P_1), сопоставляющий вершине $x_k \in X$ вектор $0 \in \mathbf{R}^n$. Положим $p'(\varphi_k(x)) = p(x)$ для каждого $\varphi_k(x) \in \varphi_k(X)$. Рассматривая задачу $\mathbf{R}^n\mathbf{R}^n\varphi_k(X)$, получим на основе работ ([3, 4]), что множество решений Y_*^k этой задачи состоит из некоторой замкнутой t-мерной грани P_k^t параллелепипеда P^n. Теперь применяя технику доказательства из работ ([3, 4]), а также теоремы 1 — 3, получим соотношения $|\mathcal{U}_A| = t \leqslant 2$, $\varphi_k(X^A) = P_0 \cap P_k^t$. Далее, рассмотрим куб $I^n = \{y\colon 0 \leqslant y^j \leqslant 1\}$ пространства $\mathbf{R}^n$ и образуем граф (I_0, I_1) аналогично тому, как был образован граф (P_0, P_1). Пусть $\psi\colon (P_0, P_1) \to (I_0, I_1)$ — изоморфизм, порожденный линейным преобразованием $T\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ с матрицей $(a_i^j)_{n\times n}$, где $a_j^j = 1/d_j$, $a_i^j = 0$ при $i \neq j$. Пусть ψ_k — сужение ψ на $\varphi_k(X)$. Положим $\alpha_k = \psi_k \circ \varphi_k$, $Z = \alpha_k(X)$, $I_k^t = T(P_k^t)$, $p''(z) = p'(\varphi_k(x))$, для любого $z \in Z$ и рассмотрим задачу $\mathbf{R}^n\mathbf{R}^nZ$ с функцией $p''(z)$. Пусть Z_*^k — множество решений этой задачи. Рассуждая аналогично тому, как это сделано в работах ([3, 4]), получим $Z_*^k = I_k^t$ и $\alpha_k(X^A) = I_0 \cap Z_*^k = T_k$ для любого $k = 1, 2, \ldots, m$. Далее, отображение $\beta_k\colon \mathcal{U} \to \mathbf{R}^m$, как легко заметить, однозначно определяется отображением α_k.

Теперь легко получается окончательное доказательство теоремы А.

Доказательство теоремы В получается непосредственно.

Доказательство теоремы С следует из выпуклости множества M и сравнения значений функционала $F(x)$ для вершин графа G, лежащих на кратчайшей цепи, соединяющей вершины x_* и $\tilde{x}$, с применением к этому приведенных выше рассмотрений.

Институт математики с вычислительным центром
Академии наук МССР
Кишинев

Поступило
29 X 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] К. Берж, Теория графов и ее применения, М., 1962. [2] В. Г. Болтянский, Гомотопическая теория непрерывных отображений и векторных полей, М., 1955. [3] Д. К. Замбицкий, П. С. Солтан, Об одной экстремальной задаче на дереве, Математические методы в экономических задачах, № 1, М., 1969. [4] Д. К. Замбицкий, Относительно одной экстремальной задачи на графе, Прикладная математика и программирование, Кишинев, 1968. [5] С. И. Зуховицкий, Л. И. Авдеева, Линейное и выпуклое программирование, М., 1967. [6] Г. Ш. Рубинштейн, Сибирск. матем. журн., 6, № 3 (1965).