Доклады Академии наук СССР
1971. Том 198, № 1

УДК 517.944/947+517.9

МАТЕМАТИКА

ЧАН ЗУЙ ХО, Г. И. ЭСКИН

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 23 XI 1970)

1. Пусть $\Omega = \Omega_0 \times (0, +\infty)$ — цилиндрическая область в $\mathbf{R}^{n+1}$, $\Omega_0 \subset \mathbf{R}^n$ — ограниченная область с гладкой границей Γ, $S = \Gamma \times (0, +\infty)$ — боковая поверхность цилиндра Ω. Обозначим через $H_{s,\gamma}(\mathbf{R}^{n+1})$ пространство Соболева — Слободецкого функций $f(x)$ (обобщенных при $s < 0$) с конечной нормой

$$\|f\|^2_{s,\gamma} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (1 + |\xi_0|^{1/\gamma} + |\xi'|)^{2s} |\tilde{f}(\xi_0, \xi')|^2 d\xi_0\, d\xi' \tag{1}$$

и с носителем в $\bar{\mathbf{R}}_+^{n+1}$, где $\bar{\mathbf{R}}_+^{n+1}$ — полупространство $x_0 > 0$,

$$\tilde{f}(\xi_0, \xi') = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i(x,\xi)} f(x)\, dx, \quad (x, \xi) = x_0\xi_0 + \ldots + x_n\xi_n.$$

Пусть $\mathring{H}_{s,\gamma}(\Omega)$ — подпространство $H_{s,\gamma}(\mathbf{R}^{n+1})$, состоящее из функций с носителем в $\bar{\Omega}$, $H_{s,\gamma}(\Omega)$ — фактор-пространство $H_{s,\gamma}(\mathbf{R}^{n+1}_+) / \mathring{H}_{s,\gamma}(\mathbf{R}^{n+1}_+ \setminus \bar{\Omega})$ с нормой фактор-пространства.

Обозначим через $H_{s,\gamma}(S)$ — подпространство пространства Соболева — Слободецкого на $\Gamma \times (-\infty, \infty)$, состоящее из функций с носителем в $\bar{S}$. Будем говорить, что $f \in H^\tau_{s,\gamma}(\mathbf{R}^{n+1})$, $\tau > 0$, если $e^{-\tau x_0} f \in H_{s,\gamma}(\mathbf{R}^{n+1})$, причем норму в $H^\tau_{s,\gamma}(\mathbf{R}^{n+1})$ зададим формулой

$$\|f\|_{s,\gamma,\tau} = \|e^{-\tau x_0} f\|_{s,\gamma}. \tag{2}$$

Аналогично определяются пространства $\mathring{H}^\tau_{s\gamma}(\Omega)$, $H^\tau_{s\gamma}(\Omega)$, $H^\tau_{s\gamma}(S)$.

Матрица $A(x, \xi)$ размера $p \times p$ определяет символ параболического (в смысле И. Г. Петровского) псевдодифференциального оператора (п.д.о.), если выполнены условия:

а) $A(x, \xi_0 + i\tau, \xi')$ аналитична по $\zeta_0 = \xi_0 + i\tau$ при $\tau > 0$;

б) $A(x, t^\gamma(\xi_0 + i\tau), t\xi') = t^\alpha A(x, \xi_0 + i\tau, \xi')$, $\gamma > 1$ для любого $t > 0$, так что $\operatorname{ord}_\xi A(x, \xi) = \alpha$;

в) $A(x, \zeta_0, \xi') \in C^\infty$ при $x \in \mathbf{R}^{n+1}$, $\zeta_0 \neq 0$, $\xi' \neq 0$, причем при $|\zeta_0|^{2/\gamma} + |\xi'|^2 = 1$ $D_x^p A(x, \zeta_0, \xi')$ удовлетворяют условию Гёльдера с показателем $0 < \beta \leqslant 1 - 1/\gamma$,

$$|D_x^p D_{\xi'}^{k'} A| \leqslant C_{pk'} (|\zeta_0|^{1/\gamma} + |\xi'|)^{\alpha-\beta} |\xi'|^{\beta-|k'|},$$

где $0 \leqslant p \leqslant \infty$, $1 \leqslant |k'| < \infty$;

г) $A(x, \zeta_0, \xi') = A(\infty, \zeta_0, \xi')$ при $|x| \geqslant N$;

д) $\det A(x, \xi_0 + i\tau, \xi') \neq 0$ при $|\xi_0| + |\tau| + |\xi'| > 0$.

Пусть S_δ — δ-окрестность боковой поверхности S. Введем в S_δ координаты прямого произведения $\Gamma \times [0, \delta) \times (0, +\infty)$.

Пусть $A(x_0, x'', x_n, \xi_0, \xi'', \xi_n)$ — символ п.д.о., записанного в этих координатах, $x'' \in \Gamma$, $x_0 \in (0, \infty)$, $x_n \in [0, \delta)$, ξ'' — касательный вектор к Γ в точке x''.

Обозначим $b(x_0, x'') = e^{-i\pi\alpha}[A(x_0, x'', 0, 0, 0, +1)]^{-1} A(x_0, x'', 0, 0, 0, -1)$. Предположим, что существует s такое, что $s - \operatorname{Re}\gamma_j(x_0, x'') \neq 1/2 \pmod{k}$,

$1 \leqslant j \leqslant p$, где $\gamma_j(x_0, x'')$ — собственные числа матрицы $\gamma(x_0, x'') = = \frac{1}{2\pi i} \ln b(x_0, x'')$. Обозначим

$$\Lambda = (|\xi''|^{2\gamma} + |\xi_0|^2 + \tau^2)1/(2\gamma), \quad y = (x_0, x'', \xi_0/\Lambda^\gamma, \tau/\Lambda^\gamma, \xi''/\Lambda),$$

p — оператор сужения. При любом фиксированном y п.д.о. $pA_y u(x_n) = = f(x_n)$ на полуоси является нормально разрешимым, если только $\ldots - \operatorname{Re}\gamma_j \neq 1/2 (\operatorname{mod} k)$. Пусть $n_+(y)$ $(n_-(y))$ — размерность его ядра (коядра), $L \geqslant \max_y n_+(y)$, $M \geqslant \max_y n_-(y)$, $L - M = n_+(y) - n_-(y) = n$ не зависит от y.

Рассмотрим краевую задачу

$$pAu + \sum_{k=1}^{M} G_k(\rho_k(x_0, x'') \times \delta(S)) = f(x); \tag{3}$$

$$B_j u|_S + \sum_{k=1}^{M} E_{jk}\rho_k = g_j(x_0, x''), \quad 1 \leqslant j \leqslant L; \tag{4}$$

где B_j, G_k — п.д.о. в $\mathbf{R}^{n+1}$, обладающие свойствами а) — г), причем $\operatorname{ord} B_j(x, \xi) = \beta_j$, $\operatorname{ord}_\xi G_k(x, \xi) = \alpha_k$, E_{jk} — п.д.о. на $\Gamma \times (-\infty, \infty)$ с символами $E_{jk}(x_0, x'', \xi_0 + i\tau, \xi'')$ порядка однородности $\alpha_k + \beta_j - \alpha + 1$, $\delta(S)$ — дельта-функция подмногообразия $\Gamma \times (-\infty, \infty)$, p — оператор сужения на Ω.

Теорема 1. *Пусть при каждом фиксированном y соответствующая (3), (4) краевая задача на полуоси однозначно разрешима* (ср. [1]) *и $\beta_j < s - 1/2$, $\alpha_k < \alpha - s - 1/2$.*

Тогда при $\tau \geqslant \tau_1$, где τ_1 достаточно велико, краевая задача (3), (4) *при любых* $(f(x), g_1, \ldots, g_L) \in \mathring{\mathscr{H}}_2^\tau = \left(\mathring{H}^\tau_{s-\alpha,\gamma}(\Omega) \times \prod_{j=1}^{L} H^\tau_{s-\beta_j-1/2,\gamma}(S)\right)$ *имеет единственное решение*

$$(u, \rho_1, \ldots, \rho_M) \in \mathring{\mathscr{H}}_1^\tau = \left(\mathring{H}^\tau_{s,\gamma}(\Omega) \times \prod_{k=1}^{M} H^\tau_{s-\alpha+\alpha_k+1/2,\gamma}(S)\right).$$

Наметим план доказательства теоремы 1. Рассмотрим сначала случай, когда $\Omega_0 = \mathbf{R}_+^n$ — полупространство $x_n > 0$, $\Gamma = \mathbf{R}^{n-1}$ — граница $\mathbf{R}_+^n$, символы A, B_j, G_k, E_{jk} не зависят от x. Запишем уравнения (3), (4) коротко в виде

$$\mathfrak{A}_0 U^{(1)}_{\tau_1} = F^{(1)}_{\tau_1}, \quad U^{(1)}_{\tau_1} \in \mathring{\mathscr{H}}_1^{\tau_1}, \quad F^{(1)}_{\tau_1} \in \mathring{\mathscr{H}}_2^{\tau_1}. \tag{5}$$

Пусть $H_{s,\gamma,\tau}(\mathbf{R}^{n+1})$ — пространство функций $f(x, \tau)$, зависящих от параметра τ, с конечной нормой вида (1), в которой $|\xi_0|^{1/\gamma}$ заменено на $|\xi_0|^{1/\gamma} + \tau^{1/\gamma}$. Соответственно определяются пространства вектор-функций $\mathscr{H}_{1,\tau}$ и $\mathscr{H}_{2,\tau}$, аналогичные $\mathring{\mathscr{H}}_1^\tau$, $\mathring{\mathscr{H}}_2^\tau$.

Рассмотрим уравнение

$$\mathfrak{A}_\tau U_\tau = F_\tau, \quad U_\tau \in \mathscr{H}_{1,\tau}, \quad F_\tau \in \mathscr{H}_{2,\tau}, \tag{6}$$

где $\mathfrak{A}_\tau$ имеет вид, аналогичный $\mathfrak{A}_0$, с заменой в символах ξ_0 на $\xi_0 + i\tau$. Замораживая $\omega = (\xi_0/\Lambda^\gamma, \tau/\Lambda^\gamma, \xi''/\Lambda)$ и используя затем разбиение единицы по ω, получим аналогично [1], что уравнение (6) однозначно разрешимо при любом $\tau \geqslant \tau_1$ и имеет место оценка $|||U_\tau||| \leqslant C|||F_\tau|||$, где C не зависит от τ. В частности, уравнение (5) однозначно разрешимо в $\mathscr{H}_{1,\tau_1}$ и остается лишь показать, что $U^{(1)}_{\tau_1} = 0$ при $x_0 < 0$. Пусть $F_\tau = e^{-\tau x_0} F^{(1)}_{\tau_1}$. Тогда $|||F_\tau||| \leqslant C$ при $\tau \geqslant \tau_1$. Сделав в (6) преобразование Фурье по x_0, получим, что правая часть и оператор аналитически зависят от $\xi_0 + i\tau$.

Следовательно, в силу однозначной обратимости оператора решение также аналитически зависит от $\xi_0+i\tau$. Отсюда и в силу равномерной по τ оценки $|||U_\tau|||\leqslant C|||F_\tau|||\leqslant C_1$, согласно теореме Палея — Винера, $U_{\tau_1}^{(1)}=0$ при $x_0<0$. Таким образом, оператор $\mathfrak{A}_0$ имеет ограниченный обратный из $\mathring{\mathscr{H}}_2^{\tau_1}$ в $\mathring{\mathscr{H}}_1^{\tau_1}$.

Переход от случая $\Gamma=\mathbf{R}^{n-1}$ и $\Omega_0=\mathbf{R}_+{}^n$ к случаю ограниченной области и п.д.о. с символами, зависящими от x, производится по обычной схеме (см. например ([1])).

2. Символ $A(x,\xi)$, удовлетворяющий условиям а) — г), принадлежит классу $\mathscr{D}_\alpha$ (ср. ([2])), если

$$\frac{\partial^{p+k''+k_0}A(x_0,x'',0,0,0,-1)}{\partial x_n^p(\partial\xi'')^{k''}\partial\xi_0^{k_0}}=e^{-(\alpha+|k''|+k_0\gamma)\pi i}\frac{\partial^{p+k''+k_0}A(x_0,x'',0,0,0,+1)}{\partial x_n^p(\partial\xi'')^{k''}\partial\xi_0^{k_0}}. \quad (7)$$

Для п.д.о. класса $\mathscr{D}_\alpha$ имеет место теорема, аналогичная теореме 1. Отметим, что случай скалярного параболического п.д. уравнения рассмотрен в ([2]), причем метод работы ([2]) не переносится на случай систем п.д. уравнений, так как в ([2]) использовалась аналитическая зависимость от параметра ξ_0 сомножителей факторизации символа, что не имеет места в случае факторизации матриц. Случай дифференциальных параболических уравнений рассмотрен в ([3-5]).

3. Пусть V — бесконечный криволинейный цилиндр в $\mathbf{R}^{n+2}$ с основанием, лежащим в гиперплоскости $x_0=0$, такой, что пересечение V_{x_0} области V с любой гиперплоскостью $x_0=\mathrm{const}\geqslant0$ не пусто и является ограниченной областью в $\mathbf{R}^{n+1}$ с гладкой границей.

Пусть боковая поверхность Ω цилиндра V разбита гладкой n-мерной поверхностью S на две части Ω_1 и $\Omega_2:\bar\Omega_1\cap\bar\Omega_2=S$. Предполагается, что ни Ω, ни S нигде не касается гиперплоскости $x_0=\mathrm{const}$.

В V рассматривается параболическая в смысле И. Г. Петровского система дифференциальных уравнений

$$L(x,D)u(x)=f(x),\quad x=(x_0,\ldots,x_{n+1})\in V \quad (8)$$

с нулевыми начальными условиями при $x_0=0$.

На Ω_1 и Ω_2 задаются граничные операторы $D_1(x,D)$ и $D_2(x,D)$, удовлетворяющие на $\bar\Omega_1$ и $\bar\Omega_2$ условию Шапиро — Лопатинского. Предполагается, что для оператора L существует дифференциальная коэрцитивная краевая задача. С помощью теоремы 1 доказывается однозначная разрешимость в пространствах Соболева — Слободецкого с весом, обращающимся в нуль на S, следующей задачи для системы (8) (ср. ([7])):

$$D_1(x,D)u|_{\Omega_1}+\sum_{k=1}^{M}G_{k_1}(\rho_k\times\delta(S))|_{\Omega_1}=g_1(x'); \quad (9)$$

$$D_2(x,D)u|_{\Omega_2}+\sum_{k=1}^{M}G_{k_2}(\rho_k\times\delta(S))|_{\Omega_2}=g_2(x'); \quad (10)$$

$$C_ju_0|_S=h_j,\quad 1\leqslant j\leqslant L, \quad (11)$$

где G_{k_1}, G_{k_2} — п.д.о. на многообразии Ω, C_j — п.д.о. в $\mathbf{R}^{n+1}$.

Отметим, что случай, когда L — параболическое уравнение второго порядка и V — цилиндрическая область, рассмотрен в ([6]).

4. Пусть $x=(x_0,x'',x_n,x_{n+1})\in\mathbf{R}^{n+2}$, $x''=(x_1,\ldots,x_{n-1})$, $V\subset\mathbf{R}^{n+2}$ — двугранный угол $x_n>0$, $x_{n+1}>0$, Ω_1 и Ω_2 — стороны V, $S=\bar\Omega_1\cap\Omega_2$ — ребро двугранного угла V. В V для уравнения (8) с нулевыми начальными данными при $x_0=0$ рассматривается краевая задача (9) — (11). Пусть символы всех операторов в (8) — (11) не зависят от x. Сделав в (8) — (11) преобразование Фурье по (x_0,x''), а затем замену переменных $x_n\to x_n\Lambda$, $x_{n+1}\to x_{n+1}\Lambda$, получим в квадранте $x_n>0$, $x_{n+1}>0$ эллиптическую задачу с параметром $\omega=(\xi_0/\Lambda^\gamma,\ \tau/\Lambda^\gamma,\ \xi''/\Lambda)$. Используя результаты рабо-

ты (⁵) (см. также (⁹)), нетрудно показать, что при $G_{k_1}=G_{k_2}=C_j=0$ эта двумерная задача в квадранте нормально разрешима в пространствах вида $\mathring{W}_\alpha^m$ (⁸) с весом $r=\sqrt{x_n^2+x_{n+1}^2}$ при $|x_n|+|x_{n+1}|\leqslant 1$ и $r=1$ при $|x_n|+|x_{n+1}|\geqslant 2$.

Пусть $n_+(\omega)$, $n_-(\omega)$ — размерности соответствующих ядер и коядер. Пусть $L\geqslant\max\limits_\omega n_+(\omega)$, $M\geqslant\max\limits_\omega n_-(\omega)$, $L-M=n_+(\omega)-n_-(\omega)$. Предположим, что G_{k_1}, G_{k_2}, C_j таковы, что при каждом ω эллиптическая задача в квадранте (8) — (11) (в этом случае g_1, g_2, ρ_k — комплексные числа) однозначно разрешима в $\mathring{W}_\alpha^m$. Отсюда следует, что однозначно разрешима исходная задача (8)—(11) в $n+2$-мерном двугранном угле V. Как и выше, по обычной схеме осуществляется переход от краевой задачи в двугранном угле к краевой задаче в цилиндре с кусочно-гладкой границей. Отметим, что для эллиптических уравнений подобные результаты были независимо получены В. В. Грушиным и вторым из авторов для смешанной краевой задачи в областях с ребрами (неопубликовано) * и Б. Ю. Стерниным для краевых задач типа С. Л. Соболева (¹⁰). Для случая обычной краевой задачи (8)—(10) в двугранном угле, т. е. в случае, когда $G_{k_1}=G_{k_2}=0$ нами доказано, что существуют числа α_- и α_+ такие, что при любых $\alpha<\alpha_-$, за исключением дискретного множества, решение краевой задачи в $\mathring{W}_\alpha^m$ единственно и имеет место соответствующая априорная оценка (существования, вообще говоря, нет); при $\alpha>\alpha_+$ имеет место существование решения в $\mathring{W}_\alpha^m$ (вообще говоря, без единственности).

Институт проблем механики
Академии наук СССР
Москва

Поступило
13 XI 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. И. Вишик, Г. И. Эскин, Матем. сборн., 74 (116), 326 (1967). [2] М. И. Вишик, Г. И. Эскин, Матем. сборн., 71 (113), 162 (1966). [3] М. С. Агранович, М. И. Вишик, Усп. матем. наук, 19, 3, 53 (1964). [4] В. А. Солонников, Тр. матем. инст. им. В. А. Стеклова, 83 (1965). [5] С. Д. Эйдельман, Параболические системы, «Наука», 1964. [6] А. Г. Гюльмисарян, Изв. АН АрмССР, Математика, 5, № 1, 3 (1970). [7] М. И. Вишик, Г. И. Эскин, Тр. инст. прикладной математики, Тбилисск. гос. унив. 2, 31 (1969). [8] В. А. Кондратьев, Тр. Московск. матем. общ., 16, 209 (1967). [9] Г. И. Эскин, Там же, **21**, 245 (1970). [10] Б. Ю. Стернин, ДАН, 189, № 4, 732 (1969).

* *Примечание при корректуре.* Как нам сообщили В. Г. Мазья и Б. А. Пламеневский, они получили аналогичный результат для эллиптических уравнений.