Доклады Академии наук СССР
1971. Том 198, № 1

УДК 517.944

МАТЕМАТИКА

Р. С. ЭФЕНДИЕВ

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ, ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ В ПАРАБОЛИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ, ПО МАЛОМУ ПАРАМЕТРУ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 9 XI 1970)

Пусть Q — цилиндр в $(n+1)$-мерном пространстве. Не уменьшая общности, предположим, что ось x_1 направлена по высоте Q. В Q рассматривается задача:

$$L_\varepsilon u \equiv \varepsilon L_1 u + L_2 u = f(X); \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial^i u}{\partial \nu^i}\right|_\Gamma = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{2}$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр,

$$L_1 \equiv \sum_{|\alpha| \leqslant 2m} a_\alpha(X)\mathscr{D}^\alpha, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_{n+1},$$

$$L_2 \equiv \frac{\partial}{\partial x_1} + \sum_{|\beta|' \leqslant 2m} b_\beta(X)\mathscr{D}^\beta, \quad |\beta|' = \beta_2 + \ldots + \beta_{n+1},$$

$$\mathscr{D}^\alpha = \mathscr{D}_1^{\alpha_1} \ldots \mathscr{D}_{n+1}^{\alpha_{n+1}}, \quad \mathscr{D}_j = -i\frac{\partial}{\partial x_j}, \quad X = (x_1, \ldots, x_{n+1}),$$

$0 \leqslant x_1 \leqslant 1$, $f(X)$ — заданная гладкая функция, Γ — граница, а ν — внутренняя нормаль области.

Предполагается, что операторы L_ε — эллиптический, а L_2 — параболический.

Прежде чем приступить к построению асимптотики решения задачи (1) и (2), напишем другое расщепление оператора L_ε вблизи границы $x_1 = 0$ и $x_1 = 1$, для чего вводим локальные координаты вблизи этих границ:

$$t = \varepsilon^{1/(2m-1)}x_1, \quad y = (y_1, \ldots, y_n); \quad \tau = \varepsilon^{1/(2m-1)}(x_1 - 1), \quad \eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$$

соответственно. Здесь $y = (y_1, \ldots, y_n)$ и $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$ — координаты основания нормали нижнего и верхнего основания цилиндра.

Написав коэффициенты оператора L_ε в новых координатах и разложив их по формуле Тейлора вблизи границы $x_1 = 0$, учитывая, что $\partial / \partial x_1 = \varepsilon^{-1/(2m-1)}\partial / \partial t$ имеем

$$L_{\varepsilon,1} \equiv \varepsilon^{-1/(2m-1)}\left\{\mathscr{M}_0 + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon^{i/(2m-1)}\mathscr{M}_i\right\}, \tag{3}$$

где

$$\mathscr{M}_0 = (-1)^m a_0(y)\partial^{2m} / \partial t^{2m} + \partial / \partial t,$$

$\mathscr{M}_i$ — суть линейные дифференциальные выражения, $a_0(y) > 0$ — первый член разложения коэффициента при производной $\mathscr{D}_1^{2m}$ по формуле Тейлора. Здесь отметим, что при $x_1 = 1$ получится аналогичное расщепление $L_{\varepsilon,2}$.

Асимптотическое представление решения задачи (1) и (2) будем искать в виде

$$u = \sum_{ij=0}^{u} \varepsilon^{i+j/(2m-1)} w_{ij} + \sum_{kl=0}^{n(2m-1)} \varepsilon^{k+(l+1)/(2m-1)} v_{kl}^0 + \sum_{pq=0}^{n(2m-1)} \varepsilon^{p+q/(2m-1)} v_{pq}^1 + + \varepsilon^{n+n/(2m-1)} z, \quad (4)$$

где функции w_{ij}, $v_{kl}{}^0$ и $v_{pq}{}^1$ определяются итерационными процессами.

Приступим к определению этих функций.

В первом итерационном процессе приближенное решение уравнения (1) ищем в виде

$$w = \sum_{ij=0}^{n} \varepsilon^{i+j/(2m-1)} w_{ij} + \varepsilon^{n/(2m-1)} z_1. \quad (5)$$

Поставив выражение для w из (5) и (1) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим

$$L_2 w_{00} = f, \quad (6)$$

$$L w_{0k} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \quad (7)$$

$$L_2 w_{ik} = -L_1 w_{i-1k}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \quad (8)$$

Функции w_{ik} $(i, k = 0, 1, \ldots, n)$ определяем как решение уравнений (6) — (8) при следующих условиях:

$$w_{00}|_{x_1=0} = 0, \quad \partial^i w_{00} / \partial \nu^i |_F = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, m-1; \quad (9)$$

$$w_{0k}|_{x_1=0} = \varphi_{0k}(y), \quad \partial^i w_{0k} / \partial \nu^i |_F = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n; \quad (10)$$

$$w_{jr}|_{x_1=0} = \varphi_{jr}(y), \quad \partial^i w_{jr} / \partial \nu^i |_F = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n; \quad r = 0, 1, \ldots, n, \quad (11)$$

где F — боковая поверхность цилиндра Q, а ν — нормаль к F, функции $\varphi_{ij}(y)$ пока произвольные, условия на них будут сформулированы позже.

Так как данные задачи (6) и (9) гладкие, она имеет единственное гладкое решение.

Прежде чем определить остальные функции w_{ij}, опишем второй итерационный процесс.

Во втором итерационном процессе вблизи границы $x_1 = 0$ приближенное решение уравнения $L_{\varepsilon,1} v^0 = 0$ ищем в виде

$$v^0 = \sum_{kl=0}^{n(2m-1)} \varepsilon^{k+(l+1)/(2m-1)} v_{kl}^0 + \varepsilon^{n+(n+1)/(2m-1)} z_2. \quad (12)$$

Подставив выражение для функции v^0 из (12) в уравнение (3) и сравнивая члены при одинаковых степенях ε, получим

$$\mathcal{M}_0 v_{k0}^0 = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, n(2m-1); \quad (13)$$

$$\mathcal{M}_0 v_{kl}^0 = -(\mathcal{M}_l v_{k0}^0 + \ldots + \mathcal{M}_1 v_{k\,l-1}^0), \quad l = 1, 2, \ldots, n(2m-1). \quad (14)$$

Очевидно, уравнение (13) обыкновенное. Напишем его характеристическое уравнение

$$(-1)^m a_0 \lambda^{2m} + \lambda = 0. \quad (15)$$

Уравнение (15) имеет $m-1$ корней строго в левой полуплоскости, а m корней строго в правой. Так как число корней с отрицательной реальной частью совпадает с числом граничных условий задачи (1) и (2), выпадающих при переходе к задаче (6) и (9), то вырождение регулярное.

Отметим, что итерационные процессы связаны между собой граничным условием. Для выявления этих связей подставляем сумму $w+v^0$ в граничных условиях при $x_1 = 0$, и приравнивая в каждом из них коэффициенты при одинаковых степенях по ε, для функции $v_{00}{}^0$ получаем следующие граничные условия:

$$\left.\frac{\partial v_{00}^0}{\partial t}\right|_{t=0} = -\left.\frac{\partial w_{00}}{\partial x_1}\right|_{x_1=0}, \quad \left.\frac{\partial^k v_{00}^0}{\partial t^k}\right|_{t=0} = 0, \quad k = 2, 3, \ldots, m-1. \quad (16)$$

Таким образом, функция $v_{00}{}^0$ является решением типа пограничного слоя уравнения (13) при граничных условиях (16).

Очевидно,

$$v_{00}^0 = \sum_{i=1}^{m-1} C_{00}^{0i}(y)\, e^{\lambda_i t},$$

где λ_i — те корни уравнения (15), которые находятся в левой полуплоскости.

После того как определена функция $v_{00}{}^0$, из задачи (7) и (10) при $k=1$ определяется функция w_{01}. Отметим, что функция $\varphi_{01}(y)$ из условия (9) задается так, что $(w_{01} + v_{00}{}^0)\,|_{x_1=0} = 0$, т. е. $\varphi_{01}(y) = -v_{00}{}^0\,|_{t=0}$.

Аналогично продолжая процесс, определяем остальные функции.

Наконец, опишем второй итерационный процесс вблизи границы $x_1 = 1$. Ищем решение уравнения $L_{\varepsilon,2} v^1 = 0$ в виде

$$v^1 = \sum_{pq=0}^{n(2m-1)} \varepsilon^{p+q/(2m-1)} v_{pq}^1 + \varepsilon^{n+n/(2m-1)} z_3. \quad (17)$$

Подставив это выражение в уравнение $L_{\varepsilon,2} v^1 = 0$ и сравнивая члены при одинаковых степенях ε, получим такие же уравнения, как (13) и (14).

Граничные условия, при которых решаются эти уравнения, получаются из следующих выражений:

$$\frac{\partial^k}{\partial x_1^k}\left\{\sum_{ij=0}^{n} \varepsilon^{i+j/(2m-1)} w_{ij} + \sum_{pq=0}^{n(2m-1)} \varepsilon^{p+q/(2m-1)} v_{pq}^1\right\}_{x_1=0} = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1.$$

Отсюда, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях по ε, находим граничные условия, при которых определяем функции типа пограничного слоя при $x_1 = 1$. Например, для определения функции $v_{00}{}^1$ приходим к задаче

$$\mathcal{M}_0 v_{00}^1 = 0; \quad (18)$$

$$v_{00}^1\,|_{\tau=0} = -w_{00}\,|_{x_1=1}, \quad \left.\frac{\partial^k v_{00}^1}{\partial \tau^k}\right|_{\tau=0} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, m-1. \quad (19)$$

Нами уже было отмечено, что уравнение (18) обыкновенное и характеристическое уравнение, соответствующее уравнению (18), имеет строго m корней в правой и $m-1$ корней в левой полуплоскости. Факт, что характеристическое уравнение, соответствующее уравнению (18), имеет m корней строго в правой полуплоскости, обеспечивает регулярность выражения. Учитывая это, решение задачи (18) и (19) типа пограничного слоя находим в виде

$$v_{00}^1 = \sum_{i=0}^{m-1} C_{00}^{1i}(y)\, e^{\lambda_i \tau},$$

где $\operatorname{Re}\lambda_i > 0$.

Аналогичным путем определяются остальные члены разложения (17).

Таким образом, для решения задачи (1) и (2) получили асимптотическое представление (4).

Теперь оценим остаточный член.

Из представления (4) имеем

$$\varepsilon^{n+n/(2m-1)} z = u - w - v^0 - v^1.$$

Очевидно, z удовлетворяет граничным условиям (2). Применяя к обоим частям последнего равенства оператор L_ε, причем к левой части, первому и второму слагаемому первым расщеплением, а третьему и четвертому слагаемому соответствующим вторым расщеплением и, учитывая уравнения, полученные в итерационных процессах, имеем

$$L_\varepsilon z = h,$$

где h — известная функция.

Теорема 1. *Для z справедлива оценка*

$$\|z\| \leqslant c\|h\|,$$

где c — постоянная, не зависящая от ε, а норма понимается в смысле нормы пространства $L_2(Q)$.

Подытоживая изложенное, можно сформулировать следующую теорему.

Теорема. 2. *Пусть коэффициенты и правая часть уравнения суть гладкие функции.*

Тогда для решения задачи (1) и (2) имеет место асимптотическое представление (4), где функции w_{ij} определяются первым итерационным процессом, функции v_{ij}^0 и v_{ij}^1 суть функции типа пограничного слоя соответственно вблизи границ $x_1 = 0$ и $x_1 = 1$ и определяются вторым итерационным процессом, а $\varepsilon^{n+n/(2m-1)}z$ — остаточный член, причем z ограничен в смысле метрики пространства $L_2(Q)$.

Замечание. Если порядок оператора L_2 был бы меньше, чем $2m$, то у боковой поверхности цилиндра появились бы функции типа пограничного слоя.

Институт математики и механики
Академии наук АзербССР
Баку

Поступило
27 X 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. И. Вишик, Л. А. Люстерник, УМН, 12, в. 5 (1957). [2] М. И. Вишик, Л. А. Люстерник, УМН, 15, в. 3 (93) (1960). [3] С. Д. Эйдельман, Параболические системы, «Наука», 1964. [4] М. Г. Джавадов, ДАН, 144, № 2 (1962). [5] М. Г. Джавадов, Изв. АН АзербССР, № 3 (1962).