Доклады Академии наук СССР
1971. Том 198, № 6

УДК 517.917 *МАТЕМАТИКА*

В. В. ЛАРИЧЕВА

УСРЕДНЕНИЕ ДЛЯ СИСТЕМ С ПЕРЕМЕННЫМ ПЕРИОДОМ

(Представлено академиком А. А. Дородницыным 23 XII 1970)

Для системы обыкновенных дифференциальных уравнений *

$$dx/dt = \varepsilon X(\varphi, x), \qquad d\varphi/dt = \omega(\varphi, x) \tag{1}$$

посредством усреднения на конечном интервале времени [5] вводится усреднение по времени с «переменным периодом» (эволюционная система (8)) и дается обоснование единых аналитических решений, охватывающих переход вращательного движения в апериодическое, что соответствует изменению периода до бесконечности. Одной из преодолеваемых в ходе доказательств трудностей является невыполнение условия Липшица для правых частей (1) при переходе решения (1) в апериодическое.

В (1) $\varepsilon > 0$ — малый параметр, t — время, x, X — n-мерные векторы, φ, ω — скаляры; причем **

$$X(\varphi, x) = X_1(\varphi, x)\,\omega(\varphi, x) + X_2(x), \tag{2}$$

где ω, X_1, X_2, X определены и ограничены константами в области $Q\{t \geqslant 0,\ |\varphi| \geqslant 0,\ x \in \mathscr{D} \subseteq E_n\}$:

$$|\omega|,\ |X_1|,\ |X_2| \leqslant m, \quad |X| \leqslant m(1+m) = \bar{m}, \tag{3}$$

и ω, X_1 — периодичны по φ с периодом 2π.

При $\varepsilon = 0$ из (1) получаем невозмущенную систему

$$d\varphi / dt = \omega(\varphi, x), \qquad x = \text{const}. \tag{4}$$

Пусть $\operatorname{sign} \omega = \text{const}$ при $x \in \mathscr{D}$, тогда решение (4) можно интерпретировать как некое вращательное движение, где φ — угол поворота, ω — угловая скорость вращения, период обращения по времени

$$T(x) = \int\limits_{\varphi_0}^{2\pi+\varphi_0} d\varphi/\omega(\varphi, x) \quad (x = \text{const} \in \mathscr{D}). \tag{5}$$

Здесь $T \to \infty$ при $\sup|\omega| \to 0$, $\omega = 0$ — положение равновесия системы (4).

Усредним первое уравнение (1) по времени на конечном итервале $[0, t^*]$, где $t^* \backsim 1/\varepsilon$. Затем воспользуемся (2) и вторым уравнением (1). Полагая $\varphi = \varphi^*$ при $t = t^*$, получим изолированную от второго уравнения *** систему

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\varepsilon}{t^*}\int\limits_0^{t^*} X(\varphi(t), \xi)\,dt = \frac{\varepsilon}{t^*}\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi^*} X_1(\varphi, \xi)\,d\varphi + \varepsilon X_2(\xi) = \varepsilon X^0(\xi), \tag{6}$$

* В системе (1) φ не является быстро вращающейся фазой [1-4] ввиду зависимости ω от φ.

** К виду (1), (2) легко привести, например, [6], уравнения плоского возмущенного движения твердого тела около центра масс.

*** Если перейти к медленной переменной $\tilde{\varphi} = \varepsilon\varphi$ во втором уравнении (1), то оно примет вид первого уравнения (1) с $X_1 = 1$, $X_2 = 0$ и, следовательно, для него будут справедливы результаты вида (6) — (9) и др.

где интегрирование идет при $\xi = \text{const}$ по t, входящему в φ, и по φ; $\xi(0) = x(0)$.

Выразим t^*, φ^* через параметры вращательного движения невозмущенной системы (4):

$$t^* = T(\xi)N \sim 1/\varepsilon, \quad \varphi^* = 2\pi[(N - \Delta) + \Delta] + \varphi_0, \tag{7}$$

где $T(\xi)$ — период (5) обращения по времени в невозмущенном движении, N — соответствующее число оборотов, $(N - \Delta)$ — целое число оборотов, $\Delta < 1$.

Подставляя (7) в (6) и пренебрегая членами $\sim \varepsilon^2$, приходим к уравнениям первого приближения (эволюционным)

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\varepsilon}{T(\xi)} \int\limits_{\varphi_0}^{2\pi+\varphi_0} X_1(\varphi, \xi)\, d\varphi + \varepsilon X_2(\xi) = \varepsilon X_0(\xi), \quad \xi(0) = x(0). \tag{8}$$

При $\omega \to 0$ в (1), (2) или $T \to \infty$ в (8) точные уравнения (1), (2) и эволюционные (8) стремятся к одним и тем же соотношениям соответственно

$$dx/dt = \varepsilon X_2(x), \quad d\xi/dt = \varepsilon X_2(\xi) \quad (\varphi = \text{const}). \tag{9}$$

Это вместе с теоремами 1, 2 о близости* $\sim \varepsilon$ решений (1) и (8) на конечных интервалах $t \sim 1/\varepsilon$ означает, что уравнения (8) позволяют проследить вращательное движение с переходом в апериодическое в системе (1) вплоть до ε-окрестности точки $\omega = 0$.

Теорема 1. а) *Пусть в* (1) *функции* ω, X_1, X_2, X *непрерывно дифференцируемы по* x *и для области* Q *существует константа* λ (*и* $\bar{\lambda} = \lambda(1 + 2m)$) *такая, что*

$$|\partial\omega/\partial x|, \ |dX_1/\partial x|, \ |\partial X_2/\partial x| \leqslant \lambda \quad (|\partial X/\partial x| \leqslant \bar{\lambda}); \tag{10}$$

б) *Пусть решения* (6), (8) *определены и лежат в области* $\mathscr{D}$ *вместе со своей* ρ-*окрестностью.*

Тогда для разности решений (1), (6) *или* (1), (8) *на интервале* $0 \leqslant t \leqslant L/\varepsilon$ *будет справедлива оценка вида*

$$|x - \xi| \leqslant \varepsilon M(2 \exp \varepsilon\bar{\lambda}t - 1), \ L \leqslant \frac{1}{\bar{\lambda}} \ln \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\rho}{\varepsilon M}\right). \tag{11}$$

Примечание. Для приложений важен случай $\partial\omega/\partial x \sim 1/\omega$, тогда при $\omega \sim \varepsilon$ в области Q нельзя указать единую, не зависящую от ε константу Липшица, ограничивающую $\partial X/\partial x$. В связи с этим справедлива

Теорема 2. *Пусть для системы* (1) *выполнены условия теоремы* 1 *со следующим видоизменением неравенств* (10) *в области* Q:

$$|\partial X_1/\partial x|, \quad |\partial X_2/\partial x| \leqslant \lambda, \tag{12}$$

$$|\partial\omega/\partial x| \leqslant \lambda \text{ при } \omega \sim 1, \ |\partial\omega/\partial x| \sim 1/\varepsilon \text{ при } \omega \sim \varepsilon. \tag{12'}$$

Но если значения $\omega \sim 1$ *могут поддерживаться в течение* $\varphi \sim 1/\varepsilon$, *то переходу от величин* $\omega \sim 1$ *до* $\omega \sim \varepsilon$ *соответствует изменение* $\varphi \sim 1$.

Тогда для разности решений (1), (6) *или* (1), (8) *на интервалах* $0 \leqslant t \leqslant L/\varepsilon$ *будет справедлива оценка вида* (11).

---

* Напомним, что в общем случае усреднения на конечном интервале ([3]) (то же относится к усреднению на бесконечном интервале, ([1]), стр. 332) не удается установить явной зависимости погрешности уреднения от величины ε.

Заметим также, что, разделив первое уравнение (1) почленно на второе, получим уравнение в стандартной форме для метода усреднения ([1–3]): $dx/d\varphi = \varepsilon X(\varphi, x)/\omega(\varphi, x) = \varepsilon\bar{X}(\varphi, x)$, где $\bar{X}(\varphi, x)$, согласно ([1–3]), усредняется по периоду φ, равному 2π, и результат усреднения (с «постоянным периодом») пригоден вдали от ε-окрестности $\omega = 0$, так как $\bar{X}(\varphi, x) \sim 1/\varepsilon$ при $\omega \sim \varepsilon$ (нарушение условий теорем ([1, 7, 8]) о погрешности усреднения ([1–3])).

Доказательство теорем 1 и 2. Аналогично (7) введем функцию $r(t)$ посредством соотношения

$$\xi(t) = x(t) - \varepsilon \tilde{X}(t, x) + \varepsilon r(t), \quad \xi(0) = x(0), \quad r(0) = 0, \tag{13}$$

где x, ξ — решения (1), (6) соответственно, а периодическая по φ функция

$$\tilde{X}(t, \varphi) = \int_0^t [X(\varphi(t), x) - X^0(x)]\, dt = \int_{\varphi_0}^{\varphi} X_1(\varphi, x)\, d\varphi - \frac{t}{t^*} \int_{\varphi_0}^{\varphi} X_1(\varphi, x)\, d\varphi \tag{14}$$

образуется интегрированием при $x = \text{const}$ по t, входящему в φ, разности правых частей (1), (6). Здесь в силу (7) $t / t^* = N / N^*$, и при целых N, N^* выражение (14) аннулируется. Для (14) при нецелых N, N^* и для (6) легко получить оценки

$$|\tilde{X}| \leqslant 4\pi m, \quad |\partial \tilde{X} / \partial x| \leqslant 4\pi\lambda, \quad |X^0| \leqslant \tilde{m}, \quad |\partial X^0 / \partial x| \leqslant \tilde{\lambda}. \tag{15}$$

Для правой части (8) N^* — целое число, N — любое, поэтому оценки (15) и все последующие рассуждения проходят не только для (6), но и для (8).

Пользуясь (1), (2), (6), (13), приходим к интегральному уравнению типа Вольтерра для $r(t)$:

$$r = \int_0^t \{\varepsilon [\partial \tilde{X}(t, x) / \partial x]\, X(t, x) + X^0(\xi) - X^0(x)\}\, dt. \tag{16}$$

Ряд последовательных приближений Пикара для решения (16):

$$r = r_1 + \sum_{n=2}^{\infty} (r_n - r_{n-1}), \quad r_1 = \int_0^t \{\varepsilon [\partial \tilde{X} / \partial x]\, X + X^0(x - \varepsilon \tilde{X}) - X^0(x)\}\, dt,$$

. . . . (17)

$$r_n - r_{n-1} = \int_0^t \{X^0(x - \varepsilon \tilde{X} + \varepsilon r_{n-1}) - X^0(x - \varepsilon \tilde{X} + \varepsilon r_{n-2})\}\, dt.$$

Оценим члены ряда (17) с помощью неравенства (3), (10), (15).

$$|r_1| \leqslant \varepsilon \tilde{\lambda} t M, \ldots, |r_n - r_{n-1}| \leqslant (\varepsilon \tilde{\lambda} t)^n M / n!, \tag{18}$$

откуда

$$|r| \leqslant M(\exp \varepsilon \tilde{\lambda} t - 1), \quad M = 4\pi m (2 + 3m) / (1 + 2m). \tag{19}$$

На основании (13), (15), (18), (19) приходим к первому неравенству (11) и, ограничивая его правую часть числом ρ, выполним условие б) теоремы 1 и установим второе неравенство (11), что завершает доказательство теоремы 1.

Доказательство теоремы 2 отличается изменением оценки для r_1: в разности $X^0(\xi) - X^0(x)$ все члены, для которых на интервале $\varphi \backsim 1$ не выполняется условие Липшица, будут $\backsim \varepsilon$. Присоединение их к r_1 эквивалентно некоторому увеличению константы M в неравенствах (18), (19) без изменения остальных рассуждений.

Следствие. *Пусть производные по* ξ *от правых частей * усредненных систем* (6) *или* (8) *ограничены в области* Q, *а вопрос об ограниченности производной по* x *от правых частей* (1), (2) *остается открытым, тогда на интервалах* $t \backsim 1 / \varepsilon$ *решение* (16) *будет ограниченным, и для* $|x - \xi|$, *где* ξ *— решение* (6) *или* (8), *будет иметь место оценка вида* (11). *Очевидно, для ограниченности производной по* ξ *от правой части* (6) *достаточно выполнения неравенств* (12), *а для* (8) *этого недостаточно.*

На примере нелинейного возмущенного движения маятника

$$\ddot{\varphi} + a(\tau) \sin \varphi = \varepsilon [a_1(\tau) f_1(\varphi) - a_1(\tau) f_2(\varphi) \dot{\varphi}] \qquad (\tau = \varepsilon t) \tag{20}$$

покажем, как легко упрощаются и интегрируются эволюционные уравнения вида (8) вне ε-окрестности $\omega = 0$. Здесь точкой вверху обозначено

* Здесь и ниже в аналогичных формулировках подразумевается правая часть исходной (или усредненной) системы, отнесенная к ε, т. е. $X(\varphi, x)$, $X^0(\xi)$, $X_0(\xi)$ и т. п.

дифференцирование по t, функции * $f_1(\varphi)$, $f_2(\varphi)$ периодические по φ с периодом 2π. Для (20) невозмущенная ($\varepsilon = 0$, $\tau = \text{const}$) система с первым интегралом

$$\ddot{\varphi} + a \sin \varphi = 0, \quad \omega^2 + 4a \sin^2 \psi = 2E = \text{const} \quad (\omega = \dot{\varphi}, \ \psi = \varphi / 2) \quad (21)$$

имеет положения равновесия $\omega = \varphi = 0$ (центр), $\omega = 0$, $\varphi = \pi$ (седло).

При $E > 2a$ в (21) $\operatorname{sign} \omega = \text{const}$ (режим вращения), где угловая скорость и период обращения определяются формулами

$$\omega = \sqrt{2E - 4a \sin^2 \psi}, \quad T(\tau) = \int_0^\pi \frac{2d\psi}{\sqrt{2E - 4a \sin^2 \psi}}. \quad (22)$$

При $E = 2a$ в (22) $T = \infty$, а интеграл (21) определяет уравнение сепаратрисы на фазовой плоскости (ω, φ).

В возмущенном ($\varepsilon > 0$) движении (20) E — переменная величина, связанная с φ, ω, τ соотношениями (21), пользуясь которыми, преобразуем (20) к виду (1), (2):

$$\dot{E} = \varepsilon a_1 f_1(\varphi) \omega - \varepsilon a_2 (f_2(\varphi) + a' / (2aa_2)) \omega^2 + \varepsilon a' E / a, \quad \dot{\varphi} = \omega, \quad (23)$$

где ** штрихом вверху обозначено дифференцирование по τ.

Для описания вращательного с переходом в апериодический режим в системе (23) имеем эволюционные уравнения вида (8)

$$\dot{E} = \frac{\varepsilon}{T(\tau)} \int_0^{2\pi} \left\{ a_1 f_1(\varphi) - a_2 \left[f_2(\varphi) + \frac{a'}{2aa_2} \right] \omega \right\} d\varphi + \frac{\varepsilon a' E}{a}, \quad \dot{\varphi} = \frac{2\pi}{T(\tau)}, \quad (24)$$

решение которых при $T \to \infty$ стремится к соотношениям

$$2a / E = \text{const} = 1, \quad \varphi = \text{const}. \quad (24')$$

При $2a/E \ll 1$ (при $\omega \gg \varepsilon$) из (24) получаем легко решаемые

$$\dot{E} = \frac{\varepsilon}{\pi} \sqrt{\frac{E}{2}} \int_0^{2\pi} [a_1 f_1(\varphi) - \sqrt{2E}\, a_2 f_2(\varphi)]\, d\varphi, \quad \dot{\varphi} = \sqrt{2E}. \quad (25)$$

После интегрирования (25) вычисляются ω, T по формулам (22).

Относительно быстрое достижение значений $\omega \infty \varepsilon$ обеспечивает для (23) выполнение условий теоремы 2 и расширение области пригодности решения (25) в сторону малых ω. Этому способствует также то, что решение (24) зависит лишь от «медленного» времени τ, изменяющегося в узких пределах, и что параметр $2a / E$ входит в правые части (24) под знаком интегралов.

Из (25) следует: если $f_1 \equiv 0$ (нет асимметрии), а среднее значение f_2 положительное, то E будет убывающей функцией t, и вращательное движение с течением времени перейдет в колебательное или апериодическое. Если среднее значение f_1 отлично от нуля, то в системе (25) возможно возникновение непрекращающегося вращения с нарастающей величиной $\sup |\omega|$.

Центральный аэро-гидродинамический институт
им. Н. Е. Жуковского

Поступило
8 XII 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, М., 1963. [2] Ю. А. Митропольский, Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний, «Наука», 1964. [3] В. М. Волосов, УМН, 17, № 6 (108), 69 (1962). [4] Н. Н. Моисеев, Асимптотические методы в нелинейной механике, «Наука», 1969. [5] В. В. Ларичева, М. В. Рейн, ДАН, 174, № 1, 21 (1967). [6] В. В. Ларичева, А. А. Шилов, Космические исследования, 7, № 1, 61 (1969). [7] В. В. Ларичева, ДАН, 165, № 2, 289 (1965). [8] В. В. Ларичева, ДАН, 188, № 6, 1237 (1969).

* При движении тела в плоскости около центра масс f_1 соответствует асимметрии в распределении масс и сил, f_2 — наличию вязкого демпфирования.

** Для правых частей (23) нельзя указать единую, не зависящую от ε константу Липшица при $\omega \infty \varepsilon$, так как в силу (22) $\partial\omega / \partial E \infty 1 / \omega$. При $f_1 = 0$ для правой части первого уравнения (23) существует единая константа Липшица, так как $d\omega^2 / \partial E \infty \omega$.