Доклады Академии наук СССР
1971. Том 199, № 6

УДК 519.21+519.53 МАТЕМАТИКА

В. И. АРКИН, В. Л. ЛЕВИН

КРАЙНИЕ ТОЧКИ НЕКОТОРОГО МНОЖЕСТВА ИЗМЕРИМЫХ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ ОТ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ И ВЫПУКЛОСТЬ ЗНАЧЕНИЙ ВЕКТОРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

(Представлено академиком Ю. В. Линником 3 III 1971)

1°. Обозначим $K=\{(x, y):\ 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1\}$. В заметке дана характеризация крайних точек множества вектор-функций $\bar{a}(x, y)=\{a_1(x, y), \ldots, a_n(x, y)\}\in L_\infty^n(K)$, задаваемого условиями

$$\bar{a}(x, y)\in A(x, y) \text{ для почти всех } (x, y)\in K; \tag{1}$$

$$\int_0^1 \sum_{k=1}^n f_k(x, y)\,a_k(x, y)\,dy=\int_0^1 \sum_{k=1}^n f_k(x, y)\,a_k^0(x, y)\,dy,$$

$$\int_0^1 \sum_{k=1}^n g_k(x, y)\,a_k(x, y)\,dx=\int_0^1 \sum_{k=1}^n g_k(x, y)\,a_k^0(x, y)\,dx, \tag{2}$$

$$\int_0^1\!\!\int_0^1 \sum_{k=1}^n h_k(x, y)\,a_k(x, y)\,dx\,dy=\int_0^1\!\!\int_0^1 \sum_{k=1}^n h_k(x, y)\,a_k^0(x, y)\,dx\,dy,$$

где $A(x, y)$ — выпуклый компакт в R^n для каждой точки $(x, y)\in K$, $f_k(x, y)\in L_1^{m_1}(K)$, $g_k(x, y)\in L_1^{m_2}(K)$, $h_k(x, y)\in L_1^{m_3}(K)$ $(k=1,\ldots,n)$; $\bar{a}^0(x, y)=\{a_1^0(x, y), \ldots, a_n^0(x, y)\}\in L_\infty^n(K)$ — фиксированная вектор-функция, удовлетворяющая условию (1).

Полученный результат имеет применение в задачах оптимального управления и математической статистики; эти применения в заметке не рассматриваются.

Обозначим через $\operatorname{ex} A(x, y)$ множество крайних точек $A(x, y)$.

Теорема 1. *Предположим, что в R^n существует шар $B_r=\{\bar{a}: \|\bar{a}\|\leqslant r\}$, содержащий все $A(x, y)$, $(x, y)\in K$ и что множество в $K\times R^n$*

$$\{(x, y, \bar{a}):\ \bar{a}\in \operatorname{ex} A(x, y),\ (x, y)\in K\} \tag{3}$$

аналитическое (mod 0) *.

Тогда множество (1), (2) *бикомпактно в слабой топологии $\sigma(L_\infty^n(K), L_1^n(K))$ и его крайними точками являются всевозможные вектор-функции $\bar{\delta}(x, y)$, удовлетворяющие условиям* (2) *и*

$$\bar{\delta}(x, y)\in \operatorname{ex} A(x, y) \text{ для почти всех } (x, y)\in K \tag{4}$$

и только они.

Теорема 2. *Пусть для каждой точки $(x, y)\in K$ задан компакт $B(x, y)\subset R^n$, причем все $B(x, y)$ ограничены в совокупности (т. е. содержатся в некотором шаре B_r) и множество в $K\times R^n$*

$$\{(x, y, \bar{a}):\ \bar{a}\in B(x, y),\quad (x, y)\in K\}$$

---

* Множество в $K\times E$, где E — полное сепарабельное метрическое пространство, называется аналитическим (mod 0), если оно совпадает с точностью до множества, проекция которого в K имеет меру нуль, с некоторым аналитическим множеством. Аналитическим множеством называется непрерывный образ борелевского множества. Подробнее об аналитических (в другой терминологии, суслинских) множествах см. [1], [2].

аналитическое (mod 0). *Обозначим через* $\mathfrak{B}$ *множество измеримых вектор-функций* $\beta(x, y) = \{\beta_1(x, y), \ldots, \beta_n(x, y)\}$, *удовлетворяющих условию*

$$\beta(x, y) \in B(x, y) \text{ для почти всех } (x, y) \in K, \tag{5}$$

и рассмотрим линейное отображение *

$$\Gamma:\ L_\infty^n(K) \to L_1^{m_1}(X) \times L_1^{m_2}(Y) \times R^{m_3},$$

которое переводит вектор-функцию $\alpha(x, y) = \{\alpha_1(x, y), \ldots, \alpha_n(x, y)\}$ *в набор интегралов, стоящих в левой части* (2). *Обозначим через* $A(x, y)$ *выпуклую оболочку* $B(x, y)$; $A(x, y) = \operatorname{conv} B(x, y)$.

Тогда $\Gamma(\mathfrak{B})$ *выпукло, слабо бикомпактно и совпадает с образом* $\Gamma(\mathfrak{A})$ *множества* $\mathfrak{A}$ *измеримых вектор-функций* $\alpha(x, y)$, *удовлетворяющих условию* (1).

Из теорем 1 и 2 вытекает ряд следствий, обобщающих (в случае пространств Лебега) теорему А. А. Ляпунова о векторных мерах ([3]), теорему Д. Блекуэлла ([4]), теорему А. Дворецкого, А. Вальда, Дж, Вольфовица ([5]) и некоторые другие теоремы о выпуклости множества значений векторных интегралов ([6, 7]). Важным частным случаем теоремы 2 является результат И. В. Романовского и В. Н. Судакова ([8]) (см. также ([9, 10])).

З а м е ч а н и е. Теорема 1 обобщается на случай, когда K — произведение m пространств Лебега с непрерывными мерами и условие (2) на $\alpha(x_1, \ldots, x_m)$ включает интегралы по всевозможным наборам из переменных $x_1, \ldots, x_m$. Справедливо также аналогичное обобщение теоремы 2.

2°. Отметим основные этапы доказательства теоремы 1. Очевидно, нетривиально только утверждение, что всякая крайняя точка множества (1), (2) удовлетворяет условию (4). Используя аналитичность (mod 0) множества (3), можно свести доказательство этого утверждения к частному случаю, когда $A(x, y) = \{\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) : \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1,\ \alpha_k \geqslant 0\}$ для всех $(x, y) \in K$. (К этому же случаю сводится и доказательство теоремы 2, которая, таким образом, оказывается следствием теоремы 1). Следующее предложение является центральным в доказательстве указанного частного случая теоремы 1.

О с н о в н а я л е м м а. *Пусть заданы множество положительной меры* $M \subset K$ *и измеримые вектор-функции* $f(x, y) = \{f^1(x, y), \ldots, f^{m_1}(x, y)\}$, $g(x, y) = \{g^1(x, y), \ldots, g^{m_2}(x, y)\}$, $h(x, y) = \{h^1(x, y), \ldots, h^{m_3}(x, y)\}$ *на* M.

Тогда найдется ограниченная измеримая функция $e(x, y)$, *которую нельзя аппроксимировать по мере на* M *функциями вида* $(f(x, y), \varphi(x)) + (g(x, y), \psi(y)) + (h(x, y), c)$, *где* $\varphi(x) = \{\varphi^1(x), \ldots, \varphi^{m_1}(x)\}$, $\psi(y) = \{\varphi^1(y), \ldots, \varphi^{m_2}(y)\}$ — *измеримые вектор-функции,* $c = \{c^1, \ldots, c^{m_3}\} \in R^{m_3}$.

Отметим, что в ([10]) содержится редукция цитированного результата Романовского и Судакова к подобной (но существенно более простой) аппроксимационной лемме. Аналогичная редукция проходит и в общем случае.

Наметим доказательство основной леммы. Очевидно, достаточно доказать ее утверждение для какого-нибудь подмножества M, имеющего положительную меру. Поэтому мы будем считать, не умаляя общности, что функции $f(x, y)$, $g(x, y)$, $h(x, y)$ непрерывны на M и каждая точка множества M есть его точка плотности.

Будем называть р е ш е т к о й всякую совокупность точек (x_i, y_j), $i = 1, \ldots, i_0$; $j = 1, \ldots, j_0$.

Л е м м а. *Рассмотрим систему прямоугольников* $Q^{ij} = X^i \times Y^j$ $(i = 1, \ldots, i_0; j = 1, \ldots, j_0)$, где $X^1, \ldots, X^{i_0}$ — *попарно непересекающиеся отрезки на оси* x, $Y^1, \ldots, Y^{j_0}$ — *попарно непересекающиеся отрезки на оси* y

* X (Y) обозначает отрезок [0, 1] на оси x (y).

и пусть $m(N \cap Q^{ij}) \geqslant 1-\varepsilon) mQ^{ij}$, *где* $0 < \varepsilon < \min(1/i_0, \ 1/j_0)$, m — *плоская мера Лебега.*

Тогда существует решетка $(x_i, y_j) \in N \cap Q^{ij}$, $i = 1, \ldots, i_0$; $j = 1, \ldots, j_0$.

Выберем натуральные числа i_0, j_0 из условия $m_1 i_0 + m_2 j_0 + m_3 < i_0 j_0$, и будем рассматривать всевозможные решетки $(x_i, y_j) \in M$, $i = 1, \ldots, i_0$; $j = 1, \ldots, j_0$. Свяжем с каждой такой решеткой линейное отображение *

$$T\{(x_i, y_j)\}: R^{i_0 j_0} \to R^{m_1 i_0 + m_2 j_0 + m_3} = R^{m_1 i_0} \times R^{m_2 j_0} \times R^{m_3},$$

$$T\{(x_i, y_j)\}(w^{ij}) = \left\{\sum_{j=1}^{j_0} f(x_i, y_j) w^{ij}, \quad \sum_{i=1}^{i_0} g(x_i, y_j) w^{ij}, \quad \sum_{i=1}^{i_0}\sum_{j=1}^{j_0} h(x_i, y_j) w^{ij}\right\}$$

и выберем решетку $\{(\bar{x}_i, \bar{y}_j)\}$, для которой ранг этого отображения максимален; обозначим его r. Рассмотрим систему из $m_1 i_0 + m_2 j_0 + m_3$ однородных линейных уравнений с $i_0 j_0$ неизвестными w^{ij}: $T\{(x_i, y_j)\}(w^{ij}) = 0$. Возьмем r уравнений и r неизвестных, для которых соответствующий определитель $\Delta_r\{(\bar{x}_i, \bar{y}_j)\} \neq 0$. Тогда $\Delta_r\{(x_i, y_j)\} \neq 0$ и для всех близких решеток $(x_i, y_j) \in M$ $(i = 1, \ldots, i_0;\ j = 1, \ldots, j_0)$ в силу непрерывности на M функций $f(x, y)$, $g(x, y)$, $h(x, y)$. Пусть $(w_0{}^{ij})$ — какое-нибудь нетривиальное решение системы уравнений, отвечающей решетке $\{(\bar{x}_i, \bar{y}_j)\}$. Возьмем решетку $\{(x_i, y_j)\} \subset M$, для которой $\Delta_r\{(x_i, y_j)\} \neq 0$ и построим для нее специальное решение соответствующей системы уравнений $w^{ij}\{(x_i, y_j)\}$. Положим $w^{ij}\{(x_i, y_j)\} = w_0{}^{ij}$, если столбец, отвечающий неизвестной w^{ij}, не входит в определитель Δ_r. Оставшиеся r неизвестных $w^{ij}\{(x_i, y_j)\}$ определим из системы r уравнений, входящих в определитель Δ_r, по формулам Крамера. Из построения решения $w^{ij}\{(x_i, y_j)\}$ следует, что оно непрерывно зависит от r узлов решетки $(x_i, y_j) \in M$, соответствующих столбцам определителя Δ_r, и $w^{ij}\{(\bar{x}_i, \bar{y}_j)\} = w_0{}^{ij}$.

Выберем числа e_{ij} $(i = 1, \ldots, i_0;\ j = 1, \ldots, j_0)$ из условия $\sum_{i=1}^{i_0}\sum_{j=1}^{j_0} e_{ij} w_0^{ij} = 1$ и рассмотрим попарно непересекающиеся квадраты $Q^{ij} = \{(x, y):\ |x - \bar{x}_i| \leqslant \delta,\ |y - \bar{y}_j| \leqslant \delta\}$ $(i = 1, \ldots, i_0,\ j = 1, \ldots, j_0)$, где $\delta > 0$ настолько мало, что выполняются условия:

1) $m(M \cap Q^{ij}) \geqslant (1 - \varepsilon) mQ^{ij}$, где $0 < \varepsilon < \min(1/i_0,\ 1/j_0)$;

2) $\sum_{i=1}^{i_0}\sum_{j=1}^{j_0} e_{ij} w^{ij}\{(x_i, y_j)\} \geqslant 1/2$, если $(x_i, y_j) \in M \cap Q^{ij}$ $(i = 1, \ldots, i_0;\ j = 1, \ldots, j_0)$.

Положим

$$e(x, y) = \begin{cases} e_{ij}, & \text{если } (x, y) \in M \cap Q^{ij}\ (i = 1, \ldots, i_0;\ j = 1, \ldots, j_0), \\ 0, & \text{если } (x, y) \notin \cup \{Q^{ij};\ \ i = 1, \ldots, i_0;\ j = 1, \ldots, j_0\}. \end{cases}$$

Функция $e(x, y)$ искомая, так как если бы ее можно было аппроксимировать по мере на M функциями указанного вида, то нашлась бы последовательность $d_n(x, y) = (f(x, y), \varphi_n(x)) + (g(x, y), \psi_n(y)) + (h(x, y), c_n)$, сходящаяся к $e(x, y)$ на множестве N, имеющем полную меру в M. Тогда $m(N \cap Q^{ij}) = m(M \cap Q^{ij})$ и из условия 1) и леммы следовало бы существование решетки $(x_i, y_j) \in N \cap Q^{ij}$ $(i = 1, \ldots, i_0;\ j = 1, \ldots, j_0)$. Мы имели бы тогда

$$\sum_{i=1}^{i_0}\sum_{j=1}^{j_0} e_{ij} w^{ij}\{(x_i, y_j)\} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{i_0}\sum_{j=1}^{j_0} d_n(x_i, y_j) w^{ij}\{(x_i, y_j)\} = 0,$$

что невозможно, так как выполняется условие 2).

---

* Близкая конструкция использована в ([8]) для доказательства другого факта.

3°. Известны различные обобщения теоремы Ляпунова на векторные интегралы со значениями в бесконечномерных пространствах (см. ([11–14], [7], [15–17])). При этом множество значений подобного векторного интеграла уже не обязано быть выпуклым, как в конечномерном случае *, и во всех цитированных работах доказывается выпуклость замыкания этого множества.

Приведем формулировку аналогичного обобщения теоремы 2.

Пусть E, F, G, H — банаховы пространства и E сепарабельно. Рассмотрим линейное отображение **

$$\Gamma\colon L_\infty(K, E) \to L_1(X, F) \times L_1(Y, G) \times H,$$

определяемое формулой

$$\Gamma(\bar{\alpha}) = \left\{\int_0^1 f(x, y)\,\alpha(x, y)\,dy, \int_0^1 g(x, y)\,\alpha(x, y)\,dx, \int_0^1\int_0^1 h(x, y)\,\alpha(x, y)\,dx\,dy\right\}$$

для любой $\bar{\alpha} = \alpha(x, y) \in L_\infty(K, E)$, где $f(x, y) \in L_1(K, (E \to F))$, $g(x, y) \in L_1(K, (E \to G))$, $h(x, y) \in L_1(K, (E \to H))$; $(E \to F)$, $(E \to G)$, $(E \to H)$ — банаховы пространства всех непрерывных линейных отображений E, соответственно, в F, G, H с обычной операторной нормой.

Теорема 3. *Пусть для каждой точки* $(x, y) \in K$ *задан компакт* $B(x, y) \subset E$, *причем в* E *существует шар* $B_r = \{\alpha\colon \|\alpha\| \leqslant r\}$, *содержащий все* $B(x, y)$, *и множество в* $K \times E$ $\{(x, y, \alpha)\colon \alpha \in B(x, y), (x, y) \in K\}$ *аналитическое* (mod 0). *Обозначим через* $A(x, y)$ *замкнутую выпуклую оболочку* $B(x, y)$; $A(x, y) = \overline{\operatorname{conv} B(x, y)}$. *Рассмотрим в* $L_\infty(K, E)$ *множества*

$\mathfrak{A} = \{\bar{\alpha} = \alpha(x, y)\colon \alpha(x, y) \in A(x, y)$ *для почти всех* $(x, y) \in K\}$,

$\mathfrak{B} = \{\bar{\beta} = \beta(x, y)\colon \beta(x, y) \in B(x, y)$ *для почти всех* $(x, y) \in K\}$.

Справедливы следующие утверждения:

1) *замыкание в* $L_1(X, F) \times L_1(Y, G) \times H$ *множества* $\Gamma(\mathfrak{B})$ *выпукло и совпадает с замыканием* $\Gamma(\mathfrak{A})$;

2) *если* E, F, G *рефлексивны, то* $\Gamma(\mathfrak{A})$ *слабо бикомпактно в* $L_1(X, F) \times L_1(Y, G) \times H$ *и, следовательно, замкнуто в нормированной топологии.*

Замечание. Простейшие примеры показывают, что $\Gamma(\mathfrak{A})$ не обязано быть компактом в нормированной топологии, даже если E, F, G, H конечномерны.

Центральный экономико-математический институт
Академии наук СССР
Москва

Поступило
2 III 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Я. Арсенин, А. А. Ляпунов, УМН, 5, 45 (1950). [2] В. А. Рохлин, Матем. сборн., 25 (67), 235 (1949). [3] А. А. Ляпунов, Изв. АН СССР, сер. матем., 4, № 6, 465 (1940). [4] D. Blackwell, Proc. AMS, 2, 390 (1951). [5] A. Dvoretzky, A. Wald, J. Wolfowitz, Pacif. J. Math., 1, 59 (1951). [6] В. И. Аркин, Кибернетика, 2, 87 (1967). [7] А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров, УМН, 23, № 6, 51 (1968). [8] И. В. Романовский, В. Н. Судаков, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, 79, 5 (1965). [9] Ю. В. Линник, Статистические задачи с мешающими параметрами, М., «Наука», 1966. [10] V. N. Sudakov, Trans. Fourth Prague Conference on Information Theory, Prague, 1967. [11] Ch. Castaing, C. R., 260, 3838 (1965). [12] Ch. Castaing, C. R., 264, 333 (1967). [13] J. F. C. Kingman, A. P. Robertson, J. London Math. Soc., 43, 347 (1968). [14] Е. Г. Гольштейн, Экономика и матем. методы, 4, № 4, 597 (1968). [15] J. J. Uhl, Proc. AMS, 23, № 1, 158 (1969). [16] M. Valadier, Contribution a l'analyse convexe, Thèse, Univ. de Montpellier, 1970. [17] R. Wegmann, Zs. Wahrscheinlichkeitstheorie, 14, № 3, 203 (1970). [18] Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц, Линейные операторы, 1, ИЛ, 1962.

* Впервые соответствующий контрпример в 1945 г. привел сам А. А. Ляпунов.

** Определение и свойства пространств измеримых вектор-функций со значениями в банаховом пространстве см. в ([18]).