

А. И. МАРКОВ

ОБ УЧЕТЕ ОПОРНОГО ТРЕНИЯ В РАСЧЕТАХ ПРОЧНОСТИ
ХРУПКИХ МАТЕРИАЛОВ

(Представлено академиком П. А. Ребиндером 8 XII 1970)

Решения методами теории упругости ⁽¹⁾ задачи об учете сил трения, возникающих в процессе опыта ⁽²⁻⁴⁾ на контуре образца при испытании хрупких материалов на одноосное сжатие, не удовлетворяют опытным данным, так как неизвестен закон распределения сил трения и не установлено, в каких случаях силы трения устраняют скольжение образца полностью или частично. Проблема становится еще более сложной, когда образец находится в условиях сложного напряженного состояния, при котором хотя бы в одном из направлений действуют напряжения сжатия. Мы попытались учесть опорное трение при расчетах прочности хрупких материалов в условиях сложного напряженного состояния.

Для «сложного» нагружения хрупкого материала сжатием и растяжением (плоская задача) в ⁽⁵⁾ предлагалось произвести учет опорного трения функцией типа

$$f(\sigma_i^{(p)}, h/d)_j = \{ [1 - (\sigma_i^{(p)}/R_{01}^{(p)})^2]^{1/2} - 1 + (\sigma_i^{(p)}/R_{01}^{(p)})^{n_j} \} k_j, \quad (1)$$

где $\sigma_i^{(p)}$ — напряжение сжатия ($i = 1, 2, 3$);

h и d — соответственно высота и поперечный размер образца; $R_{01}^{(p)}$ — предел прочности на одноосное сжатие, полученный испытанием образца с $j = h/d = 1:1$; $k(h/d)$ — коэффициент пропорциональности, характеризующий данное значение h/d .

Учитывая новое более точное решение ⁽⁶⁾ задачи о прочности хрупких тел при сложном напряженном состоянии, перепишем уравнение (1) в виде

$$f(\sigma_i^{(p)}, h/d)_j = \{ [1 - (\sigma_i^{(p)}/R_{01}^{(p)})^2]^{1/2} - (1 - \sigma_i^{(p)}/R_{01}^{(p)})^{n_j} \} k_j. \quad (2)$$

Графическое изображение этой функции приведено на рис. 1. Построение графиков выполнено по методу, изложенному в ⁽⁶⁾. Уравнение (2) в дальнейшем используется для учета опорного трения в оценке прочности хрупких материалов при различных напряженных состояниях.

Для нагружения по схеме $\sigma_i^{(p)} \rightarrow \sigma_i^{(e)}$ на основании ^(6, 7) и (2) можем записать

$$\sigma_i^{(e)}/R_0^{(e)} = (1 - \sigma_i^{(p)}/R_{0j}^{(p)})^{n_j} + \{ [1 - (\sigma_i^{(p)}/R_{01}^{(p)})^2]^{1/2} - (1 - \sigma_i^{(p)}/R_{01}^{(p)})^{n_j} \} k_j, \quad (3)$$

где $\sigma_i^{(e)}$ — напряжение растяжения, $R_0^{(e)}$ — предел прочности материала на растяжение. Экспериментальная проверка по данным ⁽⁷⁾ критерия (3) приведена на рис. 2а.

При нагружении по схеме $\sigma_i^{(e)} \rightarrow \sigma_i^{(p)}$ разрушение материала от $\sigma_i^{(p)}$ произойдет лишь при условии, что исходное напряжение растяжения

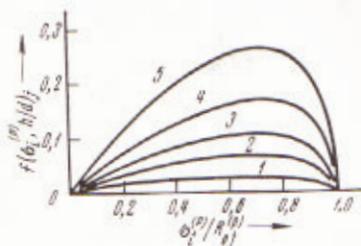


Рис. 1. Функция опорного трения при h/d 5:1 (1); 4:1 (2); 3:1 (3); 2:1 (4); 1:1 (5)

$\sigma_1^{(e)}$ будет предварительно увеличено на $f(\sigma_1^{(p)}, h/d)_j$. Значение $\sigma_1^{(e)}$ может быть определено суммированием

$$\sigma_1^{(e)}/R_0^{(e)} = \sigma_1^{*(e)}/R_0^{(e)} + f(\sigma_1^{(p)}, h/d)_j, \quad (4)$$

где функция опорного трения определяется по рис. 1 на основании расчета (6):

$$\sigma_1^{(p)}/R_{0j}^{(p)} = (1 - \sigma_1^{*(e)}/R_0^{(e)})^{1/2}. \quad (5)$$

Для построения критериальных кривых на графике точки кривой I (рис. 2б), определяющие $\sigma_1^{(p)}/R_{0j}^{(p)}$, смещаются вправо по оси абсцисс на величину $f(\sigma_1^{(p)}, h/d)_j$. Таким образом, экспериментально установленное (7) наличие S-образных кривых при нагружении по схеме $\sigma_1^{(e)} \rightarrow \sigma_1^{(p)}$ может быть получено по критерию

$$\sigma_1^{(e)}/R_0^{(e)} = 1 - (\sigma_1^{(p)}/R_{0j}^{(p)})^{1/2} + \{[1 - (\sigma_1^{(p)}/R_{01}^{(p)})^2]^{1/2} - (1 - \sigma_1^{(p)}/R_{01}^{(p)})^{1/2}\} k_j. \quad (6)$$

На рис. 2б нанесены также опытные данные (7-9).

В случае «простого» нагружения сжатием и растяжением также возникает опорное трение. При этом также неизбежно одновременное ослабле-

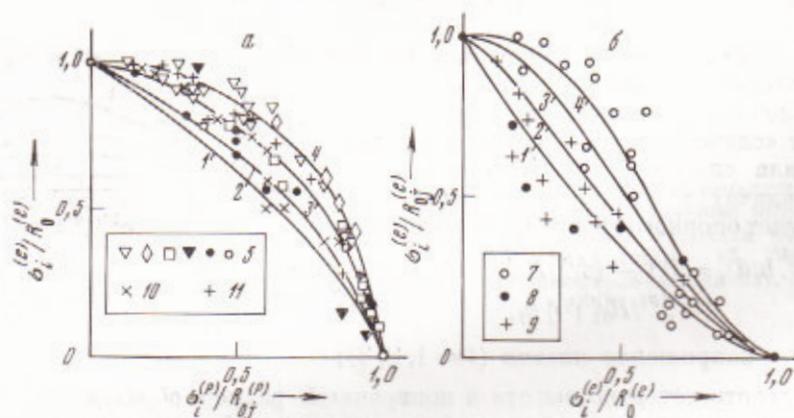


Рис. 2. Условия прочности хрупких материалов при плоском напряженном состоянии, создаваемом сжатием и растяжением, с учетом опорного трения; нагружение по схеме $\sigma_1^{(p)} \rightarrow \sigma_1^{(e)}$ (а) и $\sigma_1^{(e)} \rightarrow \sigma_1^{(p)}$ (б) при h/d 7,5 : 1 (1); 4 : 1 (2); 2 : 1 (3); 1 : 1 (4). Номера 5, 7-11 соответствуют номерам в списке цитированной литературы

ние материала напряжением $\sigma_1^{(e)}$ и растягивающими напряжениями, вызванными $\sigma_1^{(p)}$, которые удобно представить (6) в виде «среднего внутреннего напряжения отрыва» $\sigma_1^{(e)}$. Сопротивление отрыву $R_0^{(e)}$ материала после приложения к нему совокупности указанных напряжений, можно представить в виде

$$R_0^{(e)}/R_0^{(e)} = 1 - \sigma_1^{*(e)}/R_0^{(e)} - \sigma_1^{(e)}/R_0^{(e)} + f(\sigma_1^{(p)}, h/d)_j. \quad (7)$$

Согласно (6), $\sigma_1^{(e)}/R_0^{(e)} = 1 - (1 - \sigma_1^{(p)}/R_{0j}^{(p)})^{1/2}$. Учитывая, что условием разрушения материала является $R_0^{(e)}/R_0^{(e)} = 0$, критерий (7) легко преобразуем в критерий (3). На этом основании результаты опытов (10, 11) при «простом» нагружении сжатием и растяжением нанесены на рис. 2а.

В (6, 12) было отмечено, что прочность хрупких материалов при двухосном сжатии с исключением опорного трения равна прочности при одно-

осном сжатии. Задачу об учете опорного трения в данном случае также необходимо решать в связи с двумя способами нагружения — «простого» и «сложного». В обоих случаях разрушение материала произойдет в результате преодоления сопротивления отрыву самого материала $R_{0j}^{(e)}$ и опорного трения, вызванного либо предшествующим, либо одновременным приложением одного из напряжений. Условимся считать искомым напряжением $\sigma_1^{(p)} > \sigma_2^{(p)}$. Поскольку $R_{0j}^{(e)} + f(\sigma_2^{(p)}, h/d)_j \geq R_{0j}^{(e)}$, то $\sigma_1^{(p)} \geq R_{0j}^{(e)}$. В общем виде согласно (6) запишем

$$\sigma_1^{(p)} / R_{0j}^{(e)} = \{ [R_{0j}^{(e)} + f(\sigma_2^{(p)}, h/d)_j] / R_{0j}^{(e)} \}^{1/2}. \quad (8)$$

Очевидно, что для обоих случаев нагружения критерий (8) является общим, причем критериальные кривые при «сложном» нагружении явля-

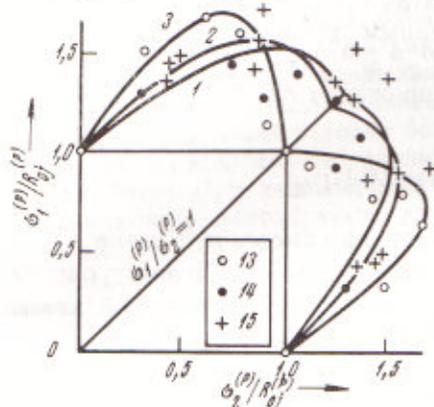


Рис. 3. Условия прочности хрупких материалов при двухосном сжатии, осуществляемом с опорным трением. 1, 2, 3 — расчетные кривые, 14, 15, 13 — опытные данные при $h/d = 4:1$; 3:1; 1:1 соответственно

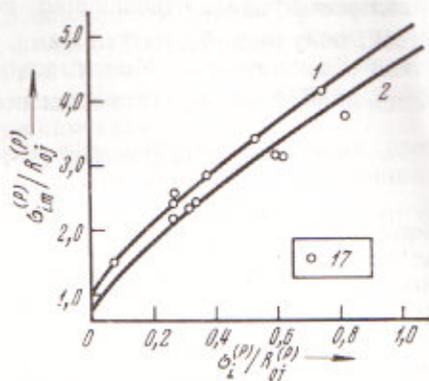


Рис. 4. Условия прочности хрупких материалов при трехосном неравномерном сжатии (расчетные данные). 1 — при исключении влияния опорного трения от бокового давления $\sigma_{\max}^{(p)} = \sigma_1^{(p)}$ (проверена в (6)); 2 — при $\sigma_{\max}^{(p)} = \sigma_2^{(p)}$

ются составными частями более общих кривых при «простом» нагружении.

Выполним построение графического изображения критерия (8). Пусть образцы, нагружаемые $\sigma_1^{(p)}$ и $\sigma_2^{(p)}$, имеют размеры $h \times h \times d$, причем $h:7,5 \leq d \leq h$, а свободные (незагруженные) грани имеют размеры $h \times h$. Следовательно, нагружению подвергаются грани с размерами $h \times d$, а опорное трение учитывается двумя функциями $f(\sigma_2^{(p)}, h/d)_{1:1}$ и $f'(\sigma_2^{(p)}, h/d)_j$. Если первая из этих функций определяет сопротивление действию $\sigma_1^{(p)}$, то вторая — сопротивление отрыву в направлении свободных граней. Напряжение $\sigma_2^{(p)}$ представляется в долях от $R_{01}^{(e)}$, что позволяет по графику (рис. 1) определить обе функции опорного трения. Отметим, что окончательно $f'(\sigma_2^{(p)}, h/d)_j = f(\sigma_2^{(p)}, h/d)_j \cdot R_{01}^{(e)} / R_{0j}^{(e)}$, так как в результате действия $f(\sigma_2^{(p)}, h/d)_{1:1}$ материал упрочняется и его сопротивление отрыву $R_{0j}^{(e)}$ при «простом» нагружении становится равным $R_{01}^{(e)}$, а соотношение h/d требует использования соответствующей кривой (рис. 1). Окончательно расчеты производятся по формуле

$$\sigma_1^{(p)} / R_{0j}^{(e)} = \{ [R_{0j}^{(e)} + f(\sigma_2^{(p)}, h/d)_{1:1} + f(\sigma_2^{(p)}, h/d)_j \cdot R_{01}^{(e)} / R_{0j}^{(e)}] / R_{0j}^{(e)} \}^{1/2}. \quad (9)$$

Построение кривых в результате расчетов по (9) производится для «сложного» нагружения до $\sigma_2^{(p)} / R_{0j}^{(e)} = 1$, а для «простого» нагружения — до пересечения с траекторией, обеспечивающей соотношение

$\sigma_1^{(p)}/\sigma_2^{(p)} = 1$, так как нижележащие траектории обеспечивают соотношение $\sigma_1^{(p)}/\sigma_2^{(p)} < 1$ и для них искомым является напряжение $\sigma_2^{(p)}$. На рис. 3 приведено семейство кривых (9) и соответствующие результаты опытов (13-15).

При испытании хрупких материалов в условиях неравномерного трехосного сжатия обычно используются образцы с $h/d > 1$, а боковое давление ($\sigma_2^{(p)} \leq \sigma_3^{(p)} < \sigma_1^{(p)}$) осуществляется практически с исключением опорного трения. Поэтому ранее (6) дано решение задачи о прочности в условиях трехосного неравномерного сжатия без учета опорного трения. Однако некоторые опыты (16, 17) осуществлены так, что максимальным напряжением в момент разрушения было боковое давление $\sigma_2^{(p)} = \sigma_3^{(p)} = \sigma^{(p)} > \sigma_1^{(p)}$. Из анализа результатов этих работ следует, что критериальная кривая, отвечающая полученным данным, находится ниже кривой, полученной при условии $\sigma^{(p)} < \sigma_1^{(p)}$ (рис. 4). Это, очевидно, можно объяснить так. Максимальное напряжение $\sigma_{1m}^{(p)}$ без учета бокового трения определяется (6) по зависимости

$$\sigma_{1m}^{(p)} = R_{0j}^{(p)} [1 + 2(\sigma^{(p)}/R_{0j}^{(p)})^{2/3}]^{3/2}. \quad (10)$$

Но предел прочности хрупкого материала на одноосное сжатие $R_{0j}^{(p)} = R_0^{(p)} = R_{7,5}^{(p)}$, если трение по торцам исключается (6). Поэтому определение $\sigma_{2m}^{(p)}$ должно производиться по зависимости (10), в которой взамен $\sigma_{1m}^{(p)}$, $R_{0j}^{(p)}$ и $\sigma^{(p)}$ используются $\sigma_{2m}^{(p)}$, $R_0^{(p)}$ и $\sigma_1^{(p)}$ соответственно:

$$\sigma_{2m}^{(p)} = R_0^{(p)} [1 + 2(\sigma_1^{(p)}/R_0^{(p)})^{2/3}]^{3/2}. \quad (11)$$

Из сравнения (10) и (11) видно, что при $\sigma_1^{(p)} = \sigma^{(p)}$ и $j < 7,5$ имеем неравенство $\sigma_{2m}^{(p)} < \sigma_{1m}^{(p)}$. Для расчетов по (11) величина $R_0^{(p)}$ определяется по графику (6) с учетом определенной экспериментально величины $R_{0j}^{(p)}$. На рис. 4 построены две критериальные кривые в соответствии с (10) и (11), а также опытные данные (17). Здесь $\sigma_{1m}^{(p)}$ и $\sigma_{2m}^{(p)}$ для сопоставления представлены в долях от $R_{0j}^{(p)}$. Согласно с экспериментальными данными позволяет считать, что здесь различие в критериальных кривых вызвано не влиянием второго по величине напряжения, а опорным трением.

Поступило
10 XI 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ И. Г. Гончаров, Прочность каменных материалов в условиях различных напряженных состояний, М.—Л., 1960. ² G. W. Hutchinson, Proc. Am. Concr. J., 49, 191 (1923). ³ H. F. Gonnerman, Proc. Am. Soc. Test. Mat., 25, Part II, 237 (1925). ⁴ W. Gehler, Der Bauingenieur, H. 2, 3, 4 (1928). ⁵ А. И. Марков, Н. В. Михайлов, П. А. Ребиндер, ДАН, 179, № 5, 1079 (1968). ⁶ А. И. Марков, Н. В. Михайлов, П. А. Ребиндер, ДАН, 192, № 5 (1970). ⁷ D. McHenry, J. Karni, J. Am. Concr. Inst., 29, 10, 829 (1958). ⁸ И. Я. Кубинь, Исследование бетона при сложном нагружении сжатием и растяжением, Диссертация, Рига, 1961. ⁹ J. Tsuboi, J. Suenaga, Tokio Univ. Inst. Industr. Sci. Rep., 11, 1 (1961). ¹⁰ Н. Н. Давиденков, А. Н. Ставрогин, Изв. АН СССР, ОТН, № 3, 101 (1954). ¹¹ R. C. Grassi, J. Cornet, J. Appl. Mech., 16, 2, 178 (1949). ¹² А. И. Марков, Н. В. Михайлов, П. А. Ребиндер, ДАН, 182, № 6, 1310 (1968). ¹³ К. П. Веригин, Сборн. Структура, прочность и деформации бетонов, М., 1966. ¹⁴ О. Я. Берг, Н. В. Смирнов, Бетон и железобетон, 11, 37 (1965). ¹⁵ Г. А. Генниев, В. Н. Киссюк, Бетон и железобетон, № 12, 553 (1962). ¹⁶ R. Böker, Цит. по К. В. Рупнейт, Механические свойства горных пород, М., 1956. ¹⁷ F. E. Richard, A. Brandtzaeg, R. L. Brown, Univ. Illinois Bull., 26, 12 (1928).