

А. Г. МЕРЖАНОВ, А. М. СТОЛИН

К ТЕПЛОВОЙ ТЕОРИИ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

(Представлено академиком Л. И. Седовым 29 XII 1970)

Основной особенностью течения сильновязких жидкостей является не-изотермический характер процесса, связанный с диссипацией энергии и зависимостью вязкости от температуры. В литературе приведены решения некоторых термогидродинамических задач в стационарной постановке, рассматривающей установившиеся в гидродинамическом и тепловом отношениях режимы (см., например, (1-4)).

В данной работе на примере куэттовского течения при достаточно общих предположениях о реологическом законе и температурной зависимости текучести показана возможность применения нестационарного подхода к построению неизотермической теории течения. Нестационарный подход позволяет решить вопрос о развитии во времени диссипативного разогрева жидкости и нестационарных характеристиках течения.

Для сильновязких жидкостей в большинстве случаев

$$Pr = \mu / (\rho a) \gg 1,$$

где Pr — критерий Прандтля, μ — динамическая вязкость, ρ — плотность, a — температуропроводность. При этом условии время гидродинамической стабилизации намного меньше характерного времени изменения температуры и с некоторой степенью точности можно принять, что профиль скоростей мгновенно подстраивается под изменение температуры (5). Такое допущение позволяет перейти к гидродинамически квазистационарному описанию неизотермического течения.

В основу рассмотрения положим уравнение теплового баланса в виде

$$c\rho \frac{dT}{dt} = q(T) - \alpha \frac{S}{V} (T - T_0). \quad (1)$$

Здесь $q(T)$ — источник тепла, связанный с диссипацией энергии (диссипативная функция тепловыделения), T — температура жидкости, T_0 — тем-

Т а б л и ц а 1

Тип течения	k	Γ	m
Между двумя пластинами	1	0	0
Осевое между двумя цилиндрами	2	1	0
Тангенциальное между двумя цилиндрами	2	2	1

пература окружающей среды, t — время, c — удельная теплоемкость, α — коэффициент теплоотдачи, S/V — отношение поверхности к объему жидкости.

Заметим, что уравнение (1), строго говоря, справедливо при отсутствии распределения температуры в жидкости. Как известно из теории теплопередачи, это справедливо при

$$Bi = \alpha r / \lambda \ll 1,$$

что имеет место в ряде практически важных случаев (здесь Bi — критерий Био, r — характерный размер, λ — коэффициент теплопроводности). При наличии распределения температур уравнение (1) можно рассматривать как усредненное по объему уравнение теплопроводности (⁶⁻⁸) и использовать в приближенных расчетах.

Таким образом, задача работы заключается в нахождении вида диссипативной функции тепловыделения $q(T)$ и анализе уравнения (1).

Рассмотрим одномерное течение жидкости, заключенной между двумя границами плоской или цилиндрической формы. Предположим, что по двум

Таблица 2	
Реологическое название жидкости	Вид функции $f(\sigma)$ (одномерное приближение)
Оствальд-де-Ваале	$\sigma \sigma ^n$
Эллиса	$\sigma (1 + A \sigma ^n)$
Прандтля	$\sin(\sigma/A)$
Балкли—Гершеля	$(\sigma - \sigma_0)^n$
Шведова—Бингама	$\sigma (1 - \sigma_0/\sigma)$
Шульмана	$\sigma [1 - (\sigma_0/\sigma)^n]$

измерениям границы либо бесконечны, либо осесимметричны, так что уравнения границ можно определить только одной координатой x вдоль нормали к поверхностям границы. Пусть $x = x_0$ — координата нижней (внутренней) границы, а $x = x_1$ — координата верхней (внешней) границы. Считаем для простоты подвижной только одну из границ с координатой $x = x_1$. В дальнейшем будем различать два режима течения: 1) с постоянной скоростью движения границы ($v_r = v_1 = \text{const}$); 2) с постоянным касательным усилением на подвижной границе ($\sigma_r = \sigma_1 = \text{const}$).

Выражение для диссипативной функции имеет вид:

$$q = k (x_1^k - x_0^k)^{-1} \int_{x_0}^{x_1} \sigma D x^{k-1} dx.$$

Здесь σ — касательное напряжение, удовлетворяющее уравнению

$$\frac{d}{dx} (\sigma x^l) = 0, \quad (2)$$

а $D = x^m \frac{d}{dx} (v/x^m)$ — скорость сдвига. Величины k, l, m характеризуют форму геометрической области и тип течения (табл. 1).

Учитывая реологическое уравнение, которое будем рассматривать в виде

$$D = \varphi(T) f(\sigma),$$

и интеграл уравнения (2)

$$\sigma = \sigma_r (x_1/x)^l,$$

получаем

$$q = \varphi(T) \frac{k \sigma_r x_1^l}{x_1^k - x_0^k} \int_{x_0}^{x_1} x^{k-l-1} f \left[\sigma_r \left(\frac{x_1}{x} \right)^l \right] dx. \quad (3)$$

Здесь $\varphi(T)$ — температурная зависимость текучести (положительная непрерывная неубывающая функция). Известные виды $f(\sigma)$ приведены в табл. 2.

Выражение (3) представляет собой искомую зависимость. Если задано $v_r = v_1 = \text{const}$, то значение σ_r зависит от температуры и может быть найдено из выражения

$$v_1 = x_1^m \varphi(T) \int_{x_0}^{x_1} x^{-m} f \left[\sigma_r \left(\frac{x_1}{x} \right)^l \right] dx, \quad (4)$$

которое получается интегрированием уравнения движения при граничных условиях: $x = x_0, v = 0$ и $x = x_1, v = v_1$.

Нахождение интегралов в выражениях (3) и (4) при конкретном задании реологического закона для различных типов течения не представляет принципиальных трудностей. Заметим только, что при их вычислении для жидкостей с пределом текучести необходимо учесть возможность появления ядра, не выделяющего тепло.

В некоторых случаях выражение для $q(T)$ имеет простой вид. Приведем два примера.

1. Течение между двумя пластинами ($k=1, l=0, m=0$). В этом случае $\sigma(x) \equiv \sigma_1 = \text{const}$. Для $q_s(T)$ и $q_v(T)$ (здесь индекс указывает, какая величина на границе задается постоянной) получаем

$$q_s(T) = \sigma_1 f(\sigma_1) \varphi(T), \quad q_v(T) = \frac{v_1}{x_1 - x_0} \bar{f} \left[\frac{v_1}{(x_1 - x_0) \varphi(T)} \right].$$

Здесь $\bar{f}(x)$ — функция, обратная $f(x)$.

2. Течение ньютоновской жидкости [$f(\sigma) \equiv \sigma$]. В этом случае

$$q_s(T) = \frac{kx_1^{2l}}{x_1^k - x_0^k} \Phi \sigma_1^2 \varphi(T),$$

где

$$\Phi = \begin{cases} (x_1^{k-2l} - x_0^{k-2l}) / (k-2l), & \text{если } k-2l \neq 0; \\ \ln(x_1/x_0), & \text{если } k-2l = 0. \end{cases}$$

$$q_v(T) = \frac{kx_1^{-2m}}{x_1^k - x_0^k} \frac{\Phi}{F^2} v_1^2 [\varphi(T)]^{-1},$$

где

$$F = \begin{cases} (x_1^{1-m-l} - x_0^{1-m-l}) / (1-m-l), & \text{если } 1-m-l \neq 0; \\ \ln(x_1/x_0), & \text{если } 1-m-l = 0. \end{cases}$$

Как видно из приведенных примеров, зависимость диссипативной функции от текучести, и, следовательно, от температуры существенно различна для двух рассмотренных случаев задания граничных условий (q_s возрастает, а q_v убывает с ростом температуры).

Таким образом, зная для конкретной жидкости функции $f(\sigma)$ и $\varphi(T)$ для данного типа течения, можно, как следует из вышесказанного, определить выражение для $q(T)$ и, решая нестационарное уравнение теплового баланса (1), рассчитать тепловой режим течения.

Рассмотрим вопрос о развитии во времени диссипативного разогрева на простейшем примере ньютоновской жидкости с экспоненциальной зависимостью вязкости от температуры:

$$\varphi(T) = 1/\mu(T) = \frac{1}{\mu_0} \exp(-u/(RT))$$

(здесь u — энергия активации течения, $1/\mu_0$ — предэкспоненциальный фактор). Нетрудно показать, что уравнение теплового баланса можно представить в безразмерном виде

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \exp\left(\frac{\pm \theta}{1 + \beta\theta}\right) - \theta/\kappa, \quad (5)$$

где $\theta = \frac{u}{RT_0^2}(T - T_0)$, $\tau = \frac{q(T_0)}{c\rho} \frac{u}{RT_0^2} t$, $\beta = \frac{RT_0}{u}$, $\kappa = \frac{q(T_0)}{aS/V} \frac{u}{RT_0^2}$.

Здесь плюс в экспоненте соответствует течению с $\sigma_r = \text{const}$, знак минус — с $v_r = \text{const}$. Уравнение (5) подробно исследовано в теории теплового взрыва (^{5, 9, 10}); поэтому можно воспользоваться известными резуль-

татами и установить некоторую физическую аналогию между протеканием экзотермической химической реакции и куэттовским течением вязкой жидкости.

В случае $\sigma_r = \text{const}$ существуют два принципиально различных режима течения. При $\kappa < \kappa_{\text{кр}} = (1 + \beta) / \epsilon$ устанавливается стационарный режим течения с небольшим разогревом $\theta < 1 + 2\beta$. При $\kappa > \kappa_{\text{кр}}$ происходит прогрессивный саморазогрев жидкости, приводящий к высоким температурам (так называемый гидродинамический тепловой взрыв). Период индукции можно определить по формуле (11)

$$\tau_{\text{инд}} = (1 + 2\beta) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k! \kappa^{-k}}{(k+1)^{k+1}}.$$

Все приведенные результаты относятся к наиболее характерному случаю $\beta \ll 1$.

Гидродинамический тепловой взрыв возникает вследствие прогрессивного поглощения энергии внешнего источника, поддерживающего постоянным σ_r .

В случае $v_r = \text{const}$ всегда устанавливается стационарный режим и явление гидродинамического теплового взрыва невозможно.

Возможность гидродинамического теплового взрыва была теоретически предсказана в работах (12-14) для напорного течения в трубе с заданным перепадом давления. В данной работе удалось теоретически вывести возможность возникновения гидродинамического теплового взрыва для течения Куэтта при заданном на границе напряжении сдвига.

В задачу данной статьи не входил анализ закономерностей неизотермического течения жидкостей различной реологической природы, хотя предложенным методом это сделать сравнительно просто.

Поступило
17 XII 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ С. А. Регирер, ПММ, 21, 3 (1957). ² С. А. Каганов, Инж.-физ. журн., 8, 4 (1965). ³ С. А. Бостанджиян, А. Г. Мержанов, С. И. Худяев, Журн. прикл. мех. и техн. физ., № 5 (1965). ⁴ С. К. Асланов, Тр. Куйбышевск. авиационного инст., в. 15, ч. 1 (1962). ⁵ С. А. Бостанджиян, А. Г. Мержанов, Н. М. Пручкина, Журн. прикл. мех. и техн. физ., № 5 (1968). ⁶ Д. А. Франк-Каменецкий, Диффузия и теплопередача в химической кинетике, «Наука», 1967. ⁷ В. В. Барзыкин, В. Т. Гонтковская и др., Журн. прикл. мех. и техн. физ., № 3 (1964). ⁸ С. И. Худяев, ДАН, 154, № 4 (1964). ⁹ Н. Н. Семенов, УФН, 23, в. 3 (1940). ¹⁰ А. Г. Мержанов, Ф. И. Дубовицкий, Усп. хим., 35, в. 4 (1966). ¹¹ А. Г. Мержанов, Ю. М. Григорьев, ДАН, 176, № 6 (1967). ¹² С. А. Каганов, Журн. прикл. мех. и техн. физ., № 3 (1962). ¹³ С. А. Бостанджиян, А. Г. Мержанов, С. И. Худяев, ДАН, 163, № 1 (1965). ¹⁴ С. А. Бостанджиян, А. М. Столин, Инж.-физ. журн., 17, 1 (1969).