Доклады Академии наук СССР
1971. Том 199, № 6

УДК 513.831

МАТЕМАТИКА

А. В. АРХАНГЕЛЬСКИЙ

О БИКОМПАКТАХ, КОТОРЫЕ УДОВЛЕТВОРЯЮТ УСЛОВИЮ СУСЛИНА НАСЛЕДСТВЕННО. ТЕСНОТА И СВОБОДНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

(Представлено академиком П. С. Александровым 24 II 1971)

Все пространства, далее рассматриваемые, предполагаются вполне регулярными. Символами τ, τ^*, λ, τ' обозначаются кардинальные числа. Через α, β, α^*, β^*, α' обозначаются порядковые числа, $|\alpha|$ — мощность α, $\mathscr{T}(\tau) = \{\alpha\colon |\alpha| < \tau\}$ и $\mathscr{T}(\tau)$ обычным образом вполне упорядочено. Наименьшее кардинальное число, большее чем τ, есть τ^+. Известно, что $|\mathscr{T}(\tau)| = \tau$. Если A — множество, лежащее в фиксированном пространстве X, то $|A|$ — мощность A, $[A]$ — замыкание A в X, $\chi(A, X)$ — характер A в X, т. е. минимум мощностей определяющих систем окрестностей A в X. Мы полагаем $[A]_\tau = \bigcup\{[B]\colon B \subset A$ и $|B| \leqslant \tau\}$ (точнее, обозначение $[A]_{\tau, X}$). Наименьшее из всех кардинальных чисел τ таких, что $[A]_\tau = [A]$ для каждого $A \subset X$, обозначается через $t(X)$. Далее $(A)_\tau = \bigcup\{[B]\colon B \subset A$ и $|B| < \tau\}$ (точнее, обозначение $(\lambda)_{\tau, X}$).

Предложение 1. *Всегда* $[[A]_\tau]_\tau = [A]_\tau$.

Доказательство. Если $z \in [[A]_\tau]_\tau$, то $z \in [C]$ для некоторого $C \subset [A]_\tau$ такого, что $|C| \leqslant \tau$. Для каждого $y \in C$ зафиксируем $B(y) \subset A$ со свойствами $|B(y)| \leqslant \tau$ и $y \in [B(y)]$. Положим $B = \bigcup\{B(y)\colon y \in C\}$. Тогда $B \subset A$, $|B| \leqslant \tau$ и $[B] \supset [C] \ni z$. Следовательно, $z \in [A]_\tau$, и предложение 1 доказано.

Замечание 1. Следующие условия равносильны:

а) если X — подпространство бикомпакта F, то $(X)_{\tau, F} = X$;

б) существует бикомпактное хаусдорфово расширение bX пространства X, для которого $(X)_{\tau, bX} = X$;

в) для каждого $B \subset X$, если $|B| < \tau$, то $[B]_X$ — бикомпакт;

г) если ξ — центрированное семейство множества в X и существует $B \in \xi$, для которого $|B| < \tau$, то $\bigcap\{[P]\colon P \in \xi\} \neq \Lambda$.

Справедливость этого замечания устанавливается без труда.

Множеством типа G_τ в пространстве X называется всякое множество вида $\bigcap\{U\colon U \in \mathscr{E}\}$, где $\mathscr{E}$ — семейство открытых в X множеств и $|\mathscr{E}| \leqslant \tau$. Если каждое множество типа G_τ в X, содержащее точку x, пересекается с A, x называют τ-предельной для A точкой. Мы полагаем $[A]^\tau = \{x \in X\colon x - \tau -$ предельная для A точка$\}$ (точнее, обозначение: $[A]^{\tau, X}$). Положим далее $(A)^\tau = \bigcap\{[A]^\lambda\colon \lambda < \tau\}$.

Предложение 2. *Всегда* $[[A]^\tau]^\tau = [A]^\tau$.

Это очевидно. Принципиально важно

Предложение 3. *Если X — бикомпакт, то* $[[A]_\tau]^\tau = [A]$ *для каждого* $A \subset X$.

Лемма 1. *Если X — бикомпакт и $x \in Q \subset X$, где Q — множество типа G_τ в X, то существует бикомпакт Φ такой, что $x \in \Phi \subset Q$ и $\chi(\Phi, X) \leqslant \tau$.*

Лемма 2. *Если каждая окрестность множества Φ пересекается со множеством B, то $\Phi \cap [B] \neq \Lambda$.*

Лемма 3. *Если $\chi(\Phi, X) \leqslant \tau$ и каждая окрестность множества Φ пересекается с фиксированным множеством $B \subset X$, то существует $C \subset B$, для которого $|C| \leqslant \tau$ и $[C] \cap \Phi \neq \Lambda$.*

Леммы 1, 2 и 3 хорошо известны и доказываются без труда. Выведем из них предложение 3. Пусть $x \in [A] \setminus [A]_\tau$, Q — множество типа G_τ в X и $x \in Q$. Применяя последовательно леммы 1, 2 и 3 (с $[A]_\tau$ в роли B), мы находим $\Phi \subset Q$ и $C \subset [A]_\tau$ такие, что $[C] \leqslant \tau$ и $[C] \cap \Phi \neq \Lambda$. Но $[C] \subset \subset [A]_\tau$ (предложение 1). Следовательно, $Q \cap [A]_\tau \supset \Phi \cap [A]_\tau \supset \Phi \cap [C] \neq \neq \Lambda$, и $x \in [[A]_\tau]^\tau$. Предложение 3 доказано.

Предложение 4. *Если X — бикомпакт $A \subset X$ и $(A)_\tau = A$, то $[A] = = (A)^\tau$.*

Доказательство. Из $(A)_\tau = A$ *следует, что* $[A]_\lambda = A$ *для любого* $\lambda < \tau$. Поэтому $[A]^\lambda = [A]$ при $\lambda < \tau$ (предложение 1) и $(A)^\tau = = \cap \{[A]^\lambda : \lambda < \tau\} = [A]$. Предложение 4 доказано.

Последняя порция соглашений о терминологии. Пусть X — некоторое пространство. Мы пишем а) $c(X) \leqslant \tau$, если мощность каждой дизъюнктной системы непустых открытых в X множеств не превосходит τ; б) $cc(X) \leqslant \tau$, если $c(Y) \leqslant \tau$ для всех $Y \subset X$; очевидно, $cc(X)$ равно верхней грани мощностей дискретных (в себе) подпространств пространства X; в) $s(X) \leqslant \tau$, если в X существует всюду плотное множество мощности $\leqslant \tau$; г) $ss(X) \leqslant \tau$, если $s(Y) \leqslant \tau$ для всех $Y \subset X$. Далее, если $M \subset X$ и $x \in [M]$, то $t(x, M) = \min \{\tau$: существует $A \subset M$, для которого $|A| \leqslant \tau$ и $x \in [A]\}$. Положим $\partial(x, M) = \max \{\tau : \tau \leqslant t(x, M)$ и $x \in \in (A)^\tau\}$. Очевидно, $\partial(x, M)$ определено корректно.

Если для каждого $\alpha \in \mathscr{T}(\tau)$ определена точка $x_\alpha \in X$ так, что $[\{x_\alpha : \alpha < \beta\}] \cap [\{x_\alpha : \beta \leqslant \alpha\}] = \Lambda$ при всех $\beta \in \mathscr{T}(\tau)$, мы говорим, что $\xi = \{x_\alpha : \alpha \in \mathscr{T}(\tau)\}$ — свободная последовательность в X длины τ ([1]).

Основная лемма 4. *Пусть X — регулярное пространство и $A \subset X$, $x \in [A]$. Существует в X свободная последовательность длины $\partial(x, A)$, все элементы которой лежат в A.*

Доказательство. Положим $\tau = \partial(x, A)$. Для каждого $\alpha \in \mathscr{T}(\tau)$ определим по индукции открытое в X множество V_α и точку $x_\alpha \in A$. Положим $V_0 = X$ и выберем $x_0 \in A$ произвольно. Пусть $\beta \in \mathscr{T}(\tau)$ и для всех $\alpha < \beta$ открытое множество $V_\alpha \ni x$ и точка $x_\alpha \in A$ определены. Положим $P_\beta = \{x_\alpha : \alpha < \beta\}$. Тогда $|P_\beta| \leqslant |\beta| < \tau$ и $P_\beta \subset A$; отсюда и из $\tau = \partial(x, A) \leqslant t(x, A)$ следует, что $[P_\beta] \not\ni x$. Примем за V_β любое открытое в X множество, для которого $x \in V_\beta \subset [V_\beta] \subset X \setminus [P_\beta]$, и положим $Q_\beta = \cap \{V_\alpha : \alpha \leqslant \beta\}$. Так как $x \in (A)^\tau$, $Q_\beta \cap A \neq \Lambda$. Обозначим через x_β какую-нибудь точку множества $Q_\beta \cap A$. Описанная процедура позволяет определить V_α и x_α для всех $\alpha \in \mathscr{T}(\tau)$. Если $\beta \leqslant \alpha$, то $x_\alpha \in Q_\alpha \subset Q_\beta \subset [V_\beta]$ и потому $[\{x_\alpha : \beta \leqslant \alpha\}] \subset [V_\beta]$. Но $[V_\beta] \cap [P_\beta] = \Lambda$ и $P_\beta = \{x_\alpha : \alpha < \beta\}$. Значит, $[\{x_\alpha : \alpha < \beta\}] \cap [\{x_\alpha : \beta \leqslant \alpha\}] = \Lambda$ и последовательность $\xi = \{x_\alpha : \alpha \in \mathscr{T}(\tau)\}$ — свободная. Лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Если X — бикомпакт $A \subset X$ и $(A)_\tau = A \neq [A]$, то $\partial(x, A) \geqslant \tau$ для любого $x \in [A] \setminus A$.*

Доказательство. Так как $(A)_\tau = A$, $t(x, A) \geqslant \tau$. В силу предложения 4, $[A] = (A)^\tau$, значит, $x \in (A)^\tau$ и $\partial(x, A) \geqslant \tau$.

Предложение 5. *Если X — бикомпакт, то*

$$\sup \{t(x, A) : A \subset X, \quad x \in [A]\} = t(X) = \sup\{\partial(x, A) : A \subset X, \ x \in [A]\}.$$

Доказательство. Первое равенство тривиально. Очевидно, всегда $\partial(x, A) \leqslant t(x, A)$. Если $\tau < t(X)$, найдется $A \subset X$, для которого $A = = [A]_\tau = [A]_{\tau^+} \neq [A]$. Тогда (лемма 5) $\partial(x, A) \geqslant \tau^+$ для всех $x \in \in [A] \setminus A$. Предложение 5 доказано.

Лемма 6. *Длина всякой свободной последовательности точек в бесконечном бикомпакте X не превосходит $t(X)$.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда существует бесконечная свободная последовательность $\xi = \{x_\alpha : \alpha \in \mathscr{T}(\tau)\}$ в X, длина которой τ — регулярное кардинальное число, большее чем $t(X)$. Некоторая точка $y \in X$ является точкой полного накопления для ξ. Так как $t(X) < \tau$, найдется $\beta \in \mathscr{T}(\tau)$, для которого $[\{x_\alpha : \alpha < \beta\}] \ni y$. Тогда

$[\{x_\alpha\colon \beta \leqslant \alpha\}] \not\ni y$ — в противоречие с тем, что y — точка полного накопления для ξ.

Сопоставив леммы 4 и 6 с предложением 5, мы получаем первый основной результат этой работы:

Теорема 1. *Для любого бесконечного бикомпакта* X $t(X) = \sup\{\tau$: *в* X *существует свободная последовательность длины* $\tau\}$.

Пусть $(\mathscr{K})$ — следующее ограничение на пространство X: *Каждое несчетное семейство непустых открытых в* X *множеств содержит несчетное центрированное подсемейство.*

Известно, что следующее утверждение $(\mathscr{E})$ не противоречит системе аксиом теории множеств: *если* $c(X) \leqslant \aleph_0$, *то* X *удовлетворяет* $(\mathscr{K})$.

Основное предложение 6. *Пусть* X — *локально бикомпактное пространство,* $t(X) = \aleph_0$, $A \subset X$, $[A] = X$, $|A| = \aleph_1$ *и никакое счетное подмножество множества* A *не всюду плотно в* X.

Тогда X *не удовлетворяет* $(\mathscr{K})$.

Доказательство. Перенумеруем взаимно однозначно элементы A счетными порядковыми числами: $A = \{x_\alpha\colon \alpha < \omega_1\}$. Положим $A_\alpha = [\{x_\beta\colon \beta < \alpha\}]$. Из $t(X) = \aleph_0$ следует, что $\bigcup\{A_\alpha\colon \alpha < \omega_1)\} = X$. Для каждого $\alpha < \omega_1$ $X \setminus A_\alpha = U_\alpha$ — непустое открытое в X множество, $U_{\alpha'} \subset U_{\alpha''}$ при $\alpha'' < \alpha'$, и $\bigcap\{U_\alpha\colon \alpha < \omega_1\} = \Lambda$. Зафиксируем непустое открытое в X множество V_α, для которого $[V_\alpha] \subset U_\alpha$ и $[V_\alpha]$ — бикомпакт. Семейство $\mathscr{A} = \{V_\alpha\colon \alpha < \omega_1\}$ несчетно. Если бы $(\mathscr{K})$ было для X верно, нашлось бы несчетное центрированное подсемейство $\mathscr{B}$ семейства $\mathscr{A}$. Но тогда $\bigcap\{[V]\colon V \in \mathscr{B}\} \neq \Lambda$ и $\bigcap\{U_\alpha\colon \alpha < \omega_1\} \neq \Lambda$ противоречие. Предложение 6 доказано.

Лемма 7. *В каждом несепарабельном пространстве существует несепарабельное подпространство мощности* $\aleph_1$.

Теорема 2. *Если* X — *пространство точечно счетного типа (например, бикомпакт), то все* $X \leqslant 2^{cc(X)}$ $(u|X| \leqslant 2^{2^{cc(X)}})$.

Это следует из предыдущей теоремы 1 и результата Б. Шапировского: вес пространства X точечно счетного типа не превосходит $2^{c(X)t(X)}$.

Теорема 3. *Пусть* X — *вполне регулярное пространство,* τ — *кардинальное число,* $c(Y) > \tau$ *для каждого* $Y \subset X$, *и если* $Z \subset X$, $|Z| > \tau$, *то* $[Z]_X$ — *бикомпакт.*

Тогда X — *бикомпакт.*

Теорема 2 вытекает из леммы 4, леммы 5 и замечания 1.

Лемма 8. *Если* $s([A]_\tau) \leqslant \tau$, *то и* $s(A) \leqslant \tau$.

Пусть $C \subset [A]_\tau$, $|C| \leqslant \tau$ и $[C] \supset [A]_\tau$, и множество B определено по C так же, как в доказательстве предложения 1. Тогда $B \subset A$, $|B| \leqslant \tau$ и $[B] \supset [A]_\tau \supset A$. Лемма 8 доказана.

Теорема 4. *Если* X — *бикомпакт и* $s(F) \leqslant \tau$ *для каждого замкнутого в* X *подпространства* F, *то* $ss(X) \leqslant \tau$.

Ясно, что $cc(X) \leqslant \tau$. Поэтому (теорема 1) $t(X) \leqslant \tau$. Значит, $[A]_\tau = [A]$ и, следовательно, $s([A]_\tau) \leqslant \tau$ для всех $A \subset X$. Но тогда, в силу леммы 8, $s(A) \leqslant \tau$. Теорема 4 доказана.

Теорема 5. (Б. Ефимов ([6])). *Вес диадического бикомпакта* X *равен* $cc(X)$.

Действительно, $cc(X)$ не больше веса X и (теорема 1) $t(X) \leqslant cc(X)$. Но ([2]) вес диадического бикомпакта всегда равен $t(X)$. Теорема 5 доказана.

Если верно $(\mathscr{E})$, то $c(X) \leqslant \aleph_0$ тогда и только тогда, когда X является (K)-пространством в смысле ([7]). Но произведение любого множества (K)-пространств — (K)-пространство ([8]). Поэтому имеет место

Теорема 6. *Совместим с ZF (системой Цермело — Френкеля аксиом теории множеств) утверждение: если* $X = \prod\{X_\alpha\colon \alpha \in A\}$ — *произведение топологических пространств, и* $c(X_\alpha) \leqslant \aleph_0$ *для всех* $\alpha \in A$, *то и* $c(X) \leqslant \aleph_0$.

Но, как очень элегантно продемонстрировал Д. Курепа ([9]), если X — континуум Суслина, то $c(X \times X) > \aleph_0$.

Итак, справедлива

Теорема 6'. *Утверждение «$c(X) \leqslant \aleph_0$ и $c(Y) \leqslant \aleph_0$, то $c(X \times Y) \leqslant \aleph_0$» не зависит от ZF.*

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
19 II 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. В. Архангельский, ДАН, 187, № 5, 967 (1969). [2] А. В. Архангельский, ДАН, 184, № 4, 767 (1969). [3] А. В. Архангельский, ДАН, 192, № 2, 239 (1970). [4] A. Arhangelskij, Czechoslov. Math. J., 18 (93), 392 (1968). [5] I. Jukasz, Bull. Polon. Acad. Sci., 18, № 2, 141 (1970). [6] Б. А. Ефимов, Тр. Московск. матем. общ., 14, 211 (1965). [7] K. Ross, A. H. Stone, Am. Math. Monthly, 71, № 4, 398 (1964). [8] E. Marczewski, Fund. Math., 34, 127 (1947). [9] G. Kurepa, C. R., 231, 1113 (1950).