Доклады Академии наук СССР
1971. Том 198, № 6

УДК 517.946 — *МАТЕМАТИКА*

С. И. ПОХОЖАЕВ

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

(*Представлено академиком В. С. Владимировым 29 XII 1970*)

Рассматривается вопрос о существовании периодических по t решений краевых задач для некоторых нелинейных гиперболических уравнений.

Введем некоторые обозначения. Пусть α — целочисленный неотрицательный мультииндекс и $\xi_\alpha \in \mathbf{R}$. Положим $\xi = \{\xi_\alpha \mid |\alpha| \leqslant m\}$. Пусть Ω — ограниченная область из пространства $\mathbf{R}^n$ с достаточно гладкой границей Γ. Всюду в этой заметке $F(x, \xi)$ $(x \in \Omega)$ есть вещественная функция, которая удовлетворяет всем предположениям, содержащимся в условии (F).

Условие (F). Пусть функция $F(x, \xi)$ является четной относительно ξ и однородной по ξ порядка $p > 1$ при всех $x \in \Omega$, так что

$$F(x, \lambda\xi) = |\lambda|^p \cdot F(x, \xi)$$

для любого $\lambda \in \mathbf{R}$ и при всех $x \in \Omega$ и $\xi = \{\xi_\alpha \mid |\alpha| \leqslant m\}$.

Пусть функция $F(x, \xi)$ определяет по формуле

$$f(u) = \int\limits_\Omega F(x, D^\alpha u(x))\, dx, \tag{1}$$

где $D^\alpha = (\partial / \partial x_1)^{\alpha_1} \cdots (\partial / \partial x_n)^{\alpha_n}$, $|\alpha| \leqslant m$, $u \in \overset{\circ}{W}{}_p^m(\Omega)$, функционал $f(u)$ над пространством С. Л. Соболева $\overset{\circ}{W}{}_p^m(\Omega)$ [1] такой, что $f(u)$ принадлежит классу C^1 и является слабо полунепрерывным снизу, т. е. из слабой сходимости $u_n \to u$ при $n \to \infty$ в $\overset{\circ}{W}{}_p^m(\Omega)$ следует, что

$$\varliminf_{n\to\infty} f(u_n) \geqslant f(u).$$

Отметим, что «алгебраические» условия на функцию $F(x, \xi)$, из которых следует это предположение относительно функционала $f(u)$, можно найти в работах [2-4].

Введем дифференциальный оператор

$$P(u, \partial u / dt, \ldots, \partial^l u / \partial t^l),$$

который удовлетворяет всем предположениям, содержащимся в условии (P).

Условие (P). *Пусть* $P(y, y_1, \ldots, y_l)$ есть вещественная непрерывная функция на $\mathbf{R}^{l+1}$.

Пусть $P(y, y_1, \ldots, y_l)$ есть нечетная и однородная порядка $\varkappa - 1 > 0$ функция, так что

$$P(\lambda y, \lambda y_1, \ldots, \lambda y_l) = |\lambda|^{\varkappa-1} \operatorname{sign} \lambda \cdot P(y, y_1, \ldots, y_l)$$

для любого $\lambda \in \mathbf{R}$ и при всех $(y, y_1, \ldots, y_l) \in \mathbf{R}^{l+1}$.

Пусть при заданном числе $p > 1$ и при любом $\mu > 0$ существует нетривиальное (ненулевое) периодическое (с периодом $T = T(\mu)$) вещественное решение $v \in C^l(I)$ $(I = (-\infty, +\infty))$ обыкновенного дифференциального уравнения

$$P(v, dv / dt, \ldots, d^l v / dt^l) + \mu |v|^{p-1} \operatorname{sign} v = 0. \tag{2}$$

Пусть оператор $P(u, \partial u/\partial t, \ldots, \partial^l u/\partial t^l)$ определен на пространстве $C^l(I; \mathring{W}_p{}^m(\Omega))$ $(p > 1)$ вещественных функций $u(x, t)$ и пусть значения этого оператора принадлежат пространству $C(I; W_{p'}{}^{-m}(\Omega))$, где $p' = p/(p-1)$.

Пусть число $\varkappa > 1$, определяющее порядок однородности, удовлетворяет неравенству $np > \varkappa(n - mp)$.

Предположим теперь относительно функции $F(x, \xi)$, удовлетворяющей условию (F), что выполнены также все предположения, содержащиеся в следующем условии.

Условие 1. Пусть при заданном числе $\varkappa > 1$ таком, что $np > \varkappa(n - mp)$, функционал $f(u)$, определенный формулой (1), является положительным $(f(u) > 0)$ на множестве $C_\varkappa$,

$$C_\varkappa = \left\{u \in \mathring{W}_p^m(\Omega) \,\Big|\, \int\limits_\Omega |u(x)|^\varkappa\, dx = 1\right\}.$$

Пусть множество

$$C_\varkappa \cap \{u \in \mathring{W}_p^m(\Omega) \,|\, f(u) \leqslant c_\varkappa + 1\},$$

где $c_\varkappa = \inf\{f(u) \,|\, u \in C_\varkappa\}$, является ограниченным в пространстве $\mathring{W}_p{}^m(\Omega)$.

Используя теоремы вложения С. Л. Соболева [1], можно получить «алгебраические» условия на функцию $F(x, \xi)$, из которых следует условие 1.

Рассмотрим теперь следующую краевую задачу:

$$P(u, \partial u/\partial t, \ldots, \partial^l u/\partial t^l) + \sum_{|\alpha| \leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha F_\alpha(x, D^\gamma u) = 0, \qquad (3)$$

$$D^\omega u|_S = 0 \quad \text{при } |\omega| \leqslant m - 1. \qquad (4)$$

Здесь $F_\alpha(x, D^\gamma u) = \partial F(x, D^\gamma u)/\partial(D^\alpha u)$ $(|\alpha|, |\gamma| \leqslant m)$ и $S = \Gamma \times I$, где $I = (-\infty, +\infty)$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (F), (P) *и условие* 1.

Тогда существует нетривиальное (ненулевое) периодическое по t решение задачи (3) — (4), *принадлежащее пространству* $C^l(I; \mathring{W}_p{}^m(\Omega))$.

Для доказательства этой теоремы достаточно заметить, что искомое решение $u(x, t)$ можно представить в виде

$$u(x, t) = v(t) \cdot w(x)$$

и для нахождения (ненулевой) функции $w \in \mathring{W}_p{}^m(\Omega)$ применить теорию собственных функций квазилинейных эллиптических задач [2-4].

Замечание. В случае $\varkappa \neq p$ достаточно предположить, что при некотором $\mu = \mu_0 > 0$ существует нетривиальное периодическое по t (с периодом T_0) вещественное решение (из класса $C^l(I)$) обыкновенного дифференциального уравнения (2).

Тогда в этом случае при выполнении всех остальных предположений, содержащихся в условиях теоремы 1, существует нетривиальное периодическое по t (с периодом T_0) решение $u \in C^l(I; \mathring{W}_p{}^m(\Omega))$ задачи (3) — (4).

Введем теперь вещественную функцию $H(x, \eta)$, где $x \in \Omega$ и $\eta = \{\eta_\beta \,|\, |\beta| \leqslant m - 1\}$, которая удовлетворяет всем предположениям, содержащимся в условии (H).

Условие (H). Пусть вещественная функция $H(x, \eta)$ является четной относительно η и однородной по η порядка $q > 1$ при всех $x \in \Omega$, так что

$$H(x, \lambda\eta) = |\lambda|^q \cdot H(x, \eta)$$

для любого $\lambda \in \mathbf{R}$ и при всех $x \in \Omega$ и $\eta = \{\eta_\beta \,|\, |\beta| \leqslant m - 1\}$.

Пусть функция $H(x, \eta)$ определяется по формуле

$$h(u) = \int_\Omega H(x, D^\beta u(x))\,dx \quad (|\beta| \leqslant m-1), \tag{5}$$

где $u \in W_p{}^m(\Omega)$, функционал $h(u)$ над пространством С. Л. Соболева $\overset{\circ}{W}_p{}^m(\Omega)$ $(p > 1)$ такой, что $h(u)$ принадлежит классу C^1, является слабо непрерывным функционалом над пространством $W_p{}^m(\Omega)$ и единица принадлежит области значений этого функционала.

Обозначим через $B(u)$ производную $h'(u)$ функционала $h(u)$ $(u \in \overset{\circ}{W}_p{}^m(\Omega))$, т. е.

$$B(u) = \sum_{|\beta| \leqslant m-1} (-1)^{|\beta|} D^\beta H_\beta(x, D^\delta u), \tag{6}$$

где $H_\beta(x, D^\delta u) = \partial H(x, D^\delta u) \,/\, \partial(D^\beta u)$ $(|\beta|, |\delta| \leqslant m-1)$.

Условие (FH). Пусть $h(u)$ есть функционал, определенный формулой (5), в которой функция H удовлетворяет условию (H).

Пусть функционал $f(u)$, определенный формулой (1), в которой функция F удовлетворяет условию (F), является положительным $(f(u) > 0)$ на множестве $Q_1 = \{u \in \overset{\circ}{W}_p{}^m(\Omega) \,|\, h(u) = 1\}$, и пусть множество $M_1 = \{u \in \overset{\circ}{W}_p{}^m(\Omega) \,|\, h(u) = 1,\ f(u) \leqslant d + 1\}$, где $d = \inf\{f(u) \,|\, u \in Q_1\}$, является ограниченным в пространстве $\overset{\circ}{W}_p{}^m(\Omega)$.

Введем линейные дифференциальные операторы L_1 и L_2 вида

$$L_1 v_1 = \sum_{k=0}^{l_1} a_k \frac{\partial^k v_1}{\partial t^k}, \quad L_2 v_2 = \sum_{i=0}^{l_2} b_i \frac{\partial^i v_2}{\partial t^i}$$

с вещественными постоянными (из $\mathbf{R}$) коэффициентами $a_0, a_1, \ldots, a_{l_1}$ и $b_0, b_1, \ldots, b_{l_2}$ соответственно.

Предположим, что относительно операторов L_1 и L_2 выполнено условие (L).

Условие (L). Пусть при заданных числах $p > 1$, $q > 1$ обыкновенное дифференциальное уравнение относительно $y = y(t)$

$$L_2(|L_1 y|^{q-1} \operatorname{sign} L_1 y) + \mu |y|^{p-1} \operatorname{sign} y = 0$$

при любом $\mu > 0$ имеет нетривиальное (ненулевое) периодическое (с периодом $T = T(\mu)$) вещественное решение $y(t)$ из класса $C^{l_1}(I)$ с $|L_1 y|^{q-1} \operatorname{sign} L_1 y$ из класса $C^{l_2}(I)$.

Рассмотрим теперь следующую краевую задачу:

$$L_2 B(L_1 u) + A(u) = 0, \tag{7}$$

$$D^\omega u|_S = 0 \quad \text{при } |\omega| \leqslant m-1, \tag{8}$$

где $A(u) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha F_\alpha(x, D^\gamma u)$ и дифференциальный оператор B определен формулой (6). Здесь функции F и H удовлетворяют условиям (F) и (H) соответственно.

Задача (7) — (8) рассматривается в классе V вещественных функций $u = u(x, t)$ $(x \in \Omega,\ t \in I)$,

$$V = \{u \,|\, u \in C^{l_1}(I; \overset{\circ}{W}{}_p^m(\Omega)),\ B(L_1 u) \in C^{l_2}(I; W_{p'}^{-m}(\Omega))\},$$

где $p' = p \,/\, (p-1)$ и $p > 1$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (F), (H), (FH) *и условие* (L).

Тогда существует нетривиальное (ненулевое) периодическое по t решение задачи (7) — (8), *принадлежащее классу V.*

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1.

Пример. Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$(-1)^k \sum_{|\beta|=k} \frac{\partial}{\partial t} D^\beta \left(\left| D^\beta \frac{\partial u}{\partial t} \right|^{q-1} \operatorname{sign} D^\beta \frac{\partial u}{\partial t} \right) + $$
$$+ (-1)^m \sum_{|\alpha|=m} D^\alpha (| D^\alpha u |^{p-1} \operatorname{sign} D^\alpha u) = 0; \tag{9}$$

$$D^\omega u|_S = 0 \quad \text{при} \quad |\omega| \leqslant m-1. \tag{10}$$

Здесь $p > 1$, $q > 1$, $0 \leqslant k < m$ и $np > q[n-(m-k)p]$.

Если $p \neq q$ $(p, q > 1)$, то для любого заданного $T > 0$ существует нетривиальное (ненулевое) периодическое по t с периодом T вещественное решение $u(x, t)$ задачи (9) — (10) такое, что $u \in C^1(I; \mathring{W}_p{}^m(\Omega))$ и

$$\sum_{|\beta|=k} D^\beta \left(\left| D^\beta \frac{\partial u}{\partial t} \right|^{q-1} \operatorname{sign} D^\beta \frac{\partial u}{\partial t} \right) \in C^1(I; W_{p'}^{-m}(\Omega)).$$

Если $p = q$ $(p, q > 1)$, то существует последовательность $\{T_k\}$ $(T_k > 0)$ с $T_k \to 0$ при $k \to \infty$ такая, что для каждого T_k существует нетривиальное периодическое по t с периодом T_k решение задачи (9) — (10), принадлежащее указанному классу.

Московский
энергетический институт

Поступило
24 XII 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Новосибирск, 1962. [2] В. И. Кондрашов, ДАН, 90, № 2, 129 (1953). [3] F. E. Browder, Existence Theorems for Nonlinear Partial Differential Equations, Parts I, II (Preprint), 1968. [4] С. И. Похожаев, Матем. сборн., 82 (124), в. 2 (5), 192 (1970).