Доклады Академии наук СССР
1971. Том 199, № 6

УДК 517.966 *МАТЕМАТИКА*

Р. ГАБАСОВ, Ф. М. КИРИЛЛОВА, А. С. МИНЮК

УПРАВЛЯЕМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

(Представлено академиком Л. С. Понтрягиным 8 II 1971)

1. Пусть в узлах двухпараметрической решетки

$$D = \{t, s: t = 0, 1, \ldots, t_1, s = 0, 1, \ldots, s_1\}$$

задано уравнение

$$x(t+1, s+1) = A_1 x(t, s) + A_2 x(t-1, s) + \\ + A_3 x(t, s-1) + B_1 u_1(t, s) + B_2 u_2(t) + B_3 u_3(s) + B_4 u_4 \quad (1)$$

с начальными условиями

$$x(t+1, 0) = A_4 x(t, 0) + B_5 u_5(t) + B_6 u_6, \\ x(0, s+1) = A_5 x(0, s) + B_7 u_7(s) + B_8 u_8, \quad (2) \\ x(0,0) = x_0, \quad x(t, s) = 0, \quad t < 0 \text{ или } s < 0.$$

Здесь x — n-вектор, u_i — векторы размерности r_i, $i = 1, \ldots, 8$, A_j, B_i, $j = 1, \ldots, 5$, $i = 1, \ldots, 8$,— постоянные матрицы соответствующих размерностей, x_0 — начальный вектор.

Будем трактовать вектор $x(t, s)$ как состояние некоторого объекта в узле t, s, векторы u_i — как управляющие воздействия, причем управление $u_1 = u_1(t, s)$ доступно выбору в любом узле решетки D, управления $u_2 = u_2(t)$, $u_5 = u_5(t)$ могут меняться лишь с изменением параметра t; аналогично векторы $u_3 = u_3(s)$, $u_7 = u_7(t)$ одинаковы для всех t, $t = 0, 1, \ldots, t_1$; наконец, управления u_4, u_6, u_8 могут выбираться лишь один раз (в начале процесса управления).

Задача. Найти условия, при которых для любых n-векторов x_0 и x_1 существуют определенные на D управления u_i, $i = 1, \ldots, 8$, переводящие объект (1) из начального состояния x_0 в конечное $x_1 = x(t_1, s_1)$.

2. По однородной части уравнения (1) составим соотношение относительно $n \times n$ матричных функций $X_{t,s}$

$$X_{t+1, s+1} = A_1 X_{t,s} + A_2 X_{t-1,s} + A_3 X_{t,s-1}. \quad (3)$$

Рекуррентное уравнение (3) назовем **определяющим уравнением объекта** управления.

Обозначим через $X^1_{t,s}$ решение (соответствующее управлению $u_1(t, s)$) определяющего уравнения (3) с начальным условием

$$X^1_{0,0} = B_1, \quad X^1_{t,0} = 0, \ t \neq 0, \quad X^1_{0,s} = 0, \ s \neq 0, \quad X^1_{t,s} = 0, \ t < 0 \text{ или } s < 0.$$

Матричные функции $X^k_{t,s}$, $k = 2, \ldots, 8$, определим как решения определяющего уравнения (3) при условиях

$$X^2_{t,s} = \{B_2, t = 0, s = 0; 0, t \neq 0 \text{ или } s \neq 0\}, \\ X^3_{t,s} = \{B_3, t = 0, s = 0; 0, t \neq 0 \text{ или } s \neq 0\}, \\ X^4_{t,s} = \{B_4, t = 0, s = 0; 0, t \neq 0 \text{ или } s \neq 0\},$$

$$X^5_{t,s}=\{B_5,\ t=0,\ s=0,\ A_4X_{t-1,0},\ t=1,2,\ldots,\ s=0;\ 0,\ t=0,\ s\neq0;\ t<0 \text{ или } s<0\},$$

$$X^6_{t,s}=\{B_6,\ t=0,\ s=0;\ A_4X_{t-1,0},\ t=1,2,\ldots,\ s=0;\ 0,\ t=0,\ s\neq0;\ t<0 \text{ или } s<0\},$$

$$X^7_{t,s}=\{B_7,\ t=0 \text{ и } s=0;\ A_5X_{0,s-1},\ t=0,\ s=1,2,\ldots;\ 0,\ t\neq0,\ s=0;\ t<0 \text{ или } s<0\},$$

$$X^8_{t,s}=\{B_8,\ t=0 \text{ и } s=0;\ A_5X_{0,s-1},\ t=0,\ s=1,2,\ldots;\ 0;\ t\neq0,\ s=0;\ t<0 \text{ или } s<0\}.$$

Теорема. *Для того чтобы сформулированная задача имела решение, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\text{ранг}\Big\{X^1_{t,s},\ t=0,1,\ldots,t_1-1,\ s=0,1,\ldots,s_1-1;\ \sum_{s=0}^{s_1-1}X^2_{t,s},\ t=0,1,\ldots,t_1-1;$$
$$\sum_{t=0}^{t_1-1}X^3_{t,s},\ t=0,1,\ldots,s_1=1;\ \sum_{t=0}^{t_1-1}\sum_{s=0}^{s_1-1}X^4_{t,s};\ X^5_{t,s_1},\ t=0,1,\ldots,t_1-1;$$
$$\sum_{t=0}^{t_1-1}X^6_{t,s_1};\ X^7_{t_1,s},\ s=0,1,\ldots,s_1-1;\ \sum_{s=0}^{s_1-1}X^8_{t_1,s}\Big\}=n. \tag{4}$$

3. Составление определяющего уравнения объекта и его специальных решений можно осуществить по единой схеме, непосредственно связанной с заданными уравнениями (1), (2). Введем соответствия

$$x(t,s)\to X_{t,s},\quad u_1(t,s)\to u^1,\quad u_2(t)\to u^2,\quad u_3(s)\to u^3,$$
$$u_4\to u^4,\ \ u_5(t)\to u^5,\ \ u_6\to u^6,\ \ u_7(s)\to u^7,\ \ u_8\to u^8. \tag{5}$$

С помощью (5) из (1), (2) получаются соотношения

$$X_{t+1,s+1}=A_1X_{t,s}+A_2X_{t-1,s}+A_3X_{t,s-1}+B_1u^1+B_2u^2+B_3u^3+B_4u^4, \tag{6}$$
$$X_{t+1,0}=A_4X_{t,0}+B_5u^5+B_6u^6,$$
$$X_{0,s+1}=A_5X_{0,s}+B_7u^7+B_8u^8,\quad X_{t,s}=0,\ t<0 \text{ или } s<0,$$

которые назовем определяющим уравнением системы (1), (2).

Решение определяющего уравнения (6) обозначим через $X_{t,s}^{i}$, $i=1,2,\ldots,8$, если оно порождено функцией u^i ($u^l=0,\ l\neq i$), где

$$u^1=\{1,\ t=0,\ s=0;\ 0,\ t\neq0 \text{ или } s\neq0\},$$
$$u^2=\{1,\ t=0,\ s=0;\ 0,\ t\neq0 \text{ или } s\neq0\},$$
$$u^3=\{1,\ t=0,\ s=0;\ 0,\ t\neq0 \text{ или } s\neq0\},$$
$$u^4=\{1,\ t=0,\ s=0;\ 0,\ t\neq0 \text{ или } s\neq0\},$$
$$u^5=\{1,\ t=0,\ s=0;\ 0,\ t\neq0,\ s=0\},$$
$$u^6=\{1,\ t=0,\ s=0;\ 0,\ t\neq0,\ s=0\},$$
$$u^7=\{1,\ t=0,\ s=0;\ 0,\ t=0,\ s\neq0\},$$
$$u^8=\{1,\ t=0,\ s=0;\ 0,\ t=0,\ s\neq0\}.$$

Нетрудно видеть, что полученные таким образом $X^{i}_{t,\cdot}$, совпадают с функциями $X^{i}_{t-1,s-1}$, $i = 1, \ldots, 4$, из п. 2.

$$X^{i}_{t,s} = X^{i}_{t-1,s},\ i = 5, 6, \quad X^{i}_{t,s} = X^{i}_{t,s-1},\ i = 7, 8.$$

Определяющее уравнение (6) системы (1), (2) назовем **невырожденным**, если его специальные решения $X^{i}_{t,s}$, $i = 1, 2, \ldots, 8$, удовлетворяют условию (4).

Таким образом, из теоремы следует, что *задача управляемости для системы* (1), (2) *имеет решение тогда и только тогда, когда ее определяющее уравнение невырождено.*

4. Критерий (4) сохранится, если в уравнении (1) и в начальных условиях (2) присутствуют дополнительные члены, соответствующие возмущениям.

Белорусский государственный университет
им. В. И. Ленина

Поступило
2 II 1971