

Р. И. СЕДО, А. В. СЫЧЕВ

О ПРОДОЛЖЕНИИ КВАЗИКОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ НА МНОГОМЕРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА БОЛЬШЕЙ РАЗМЕРНОСТИ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 28 XII 1970)

Пусть R^k , $k \geq 3$, — k -мерное евклидово пространство, $\bar{R}^k$ — k -мерное мёбиусово пространство, полученное присоединением к R^k бесконечно удаленной точки, и $\varphi(x): \bar{R}^{k-1} \rightarrow \bar{R}^{k-1}$ — произвольное квазиконформное отображение пространства R^{k-1} (при $k=3$ — плоскости) на себя, заданное $k-1$ координатными функциями $\varphi_1(x), \dots, \varphi_{k-1}(x)$, где $x = (x_1, \dots, x_{k-1})$. Возникает вопрос, возможно ли продолжить $\varphi(x)$ до квазиконформного отображения $f: \bar{R}^k \rightarrow \bar{R}^k$ пространства $\bar{R}^k$ на себя? В (1) было доказано, что для $k=3$ такое продолжение возможно. В настоящей заметке дается утвердительный ответ на поставленный вопрос для произвольного $k \geq 3$, но для квазиконформных отображений, достаточно близких к конформным.

Теорема 1. *Всякое квазиконформное отображение пространства $\bar{R}^{k-1}$, $k \geq 3$, на себя, достаточно близкое к конформному, продолжается до квазиконформного отображения полупространства $x_k \geq 0$ пространства $\bar{R}^k$ на себя.*

В доказательстве теоремы существенно используется следующая лемма Ю. Г. Решетняка (2).

Лемма. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует q_0 такое, что для всякого q -квазиконформного отображения $\varphi(x)$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(\infty) = \infty$, пространства $\bar{R}^{k-1}$, $k > 3$, на себя с $q \leq q_0$ найдется преобразование Мёбиуса $L(x)$ такое, что*

$$|\varphi(x) - L(x)| \leq \alpha(\varepsilon) \quad \text{для} \quad |x| \leq k-1, \quad (1)$$

где $\alpha(\varepsilon) = \alpha(\varepsilon, k) \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Доказательство теоремы распространяет метод, развитый в (1) для $k=3$, на многомерные пространства и приводится по следующей схеме.

1. Находим вначале кусочно-аффинное квазиконформное отображение, переводящее полупространство $x_k \geq 0$ пространства $\bar{R}^k$ на себя и совпадающее с $\varphi(x)$ во всех точках с координатами вида $(m_1, \dots, m_{k-1}, 0)$, где $m_1, \dots, m_{k-1}$ — целые числа (дискретная проблема).

Решение дискретной проблемы состоит из следующих шагов:

а) во всех точках пространства $\bar{R}^k$ с целыми координатами определяем дискретное отображение по формулам

$$f_j(m_1, \dots, m_{k-1}, n) = \frac{1}{(2n+1)^{k-1}} \sum_{\substack{|p_i| \leq n \\ i=1, \dots, k-1}} \varphi_n(m_1 + p_1, \dots, m_{k-1} + p_{k-1}), \quad (2) \\ j = 1, \dots, k-1.$$

$$f_k(m_1, \dots, m_{k-1}, n) = n C_n^{k-1} \sum_{\substack{|p_i|, |q_i| \leq n \\ i=1, \dots, k-1}} |\varphi(m_1 + p_1, \dots, m_{k-1} + p_{k-1}) - \\ - \varphi(m_1 + q_1, \dots, m_{k-1} + q_{k-1})|, \quad (3)$$

$$C_n = \sum_{\substack{|p_i|, |q_i| \leq n, \\ i=1, \dots, k-1}} \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + \dots + (p_{k-1} - q_{k-1})^2}.$$

Здесь $p_i, q_i, i = 1, \dots, k-1$, — всевозможные целые числа удовлетворяющие вышеуказанным неравенствам;

б) кубическую k -мерную решетку с узлами в точках с целыми координатами полупространства $x_k \geq 0$ подразделяем на тетраэдры с вершинами в узлах решетки;

в) используя (1) — (3), показываем, что каждый тетраэдр, натянутый на образцы вершин любого упомянутого в б) тетраэдра, имеет ту же ориентацию, что и исходный тетраэдр;

г) отсюда следует, что f продолжается до кусочно-аффинного отображения, совпадающего с φ в точках с целочисленными координатами;

д) используя снова неравенство (1), формулы (2), (3), показываем, что продолженное отображение является квазиконформным.

2. Наконец, для целых $N \geq 0$ полагаем $\varphi_N(x) = \varphi\left(\frac{x}{N}\right)$ и пусть f_N — решение дискретной задачи для φ_N . Вводим отображение $\tilde{f}_N(x) = f_N(Nx)$; $\tilde{f}_N$ совпадает с φ во всех точках $\left(\frac{m_1}{N}, \dots, \frac{m_{k-1}}{N}, 0\right)$ для целых $m_1, \dots, m_{k-1}$.

Последовательность $\{\tilde{f}_N\}$ в силу ее компактности имеет подпоследовательность, которая сходится к квазиконформному отображению, совпадающему с φ на гиперплоскости $x_k = 0$.

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
20 XII 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ L. Ahlfors, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 51, № 5 (1964). ² Ю. Г. Решетняк, ДАН, 152, № 2 (1963).