Доклады Академии наук СССР
1971. Том 198, № 6

УДК 517.512 *МАТЕМАТИКА*

М. Ф. ТИМАН, Г. ГАЙМНАЗАРОВ

НАИЛУЧШИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ И АБСОЛЮТНАЯ СХОДИМОСТЬ РЯДОВ ФУРЬЕ — ХААРА

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 30 VI 1970)

Пусть функция $f(x_1, \ldots, x_k) \in L^{(k)}(0, 1)$, т. е.

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 |f(x_1, \ldots, x_k)|\, dx_1 \ldots dx_k < \infty$$

и ряд

$$\sum_{n_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{n_k=1}^{\infty} a_{n_1, \ldots, n_k}(f)\, \varphi_{n_1}(x_1) \ldots \varphi_{n_k}(x_k) \tag{1}$$

является ее рядом Фурье по системе

$$\{\varphi_{n_1}(x_1) \ldots \varphi_{n_k}(x_k)\} \quad (n_i = 1, 2, \ldots;\ i = 1, 2, \ldots, k),$$

где $\{\varphi_n(x)\}$ — известная классическая система Хаара (определение см. в [1]). При $k = 1$ П. Л. Ульянов [1] установил следующие утверждения.

1. *Если*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\, \omega\left(f; \frac{1}{n}\right)_{L(1)} < \infty, \tag{2}$$

то почти для всех $x \in [0, 1]$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(f)\, \varphi_n(x)| < \infty, \tag{3}$$

где

$$\omega(f; h)_{L(1)} = \sup_{0<t\leqslant h} \int_0^{1-t} |f(x+t) - f(x)|\, dx,$$

$$a_n(f) = \int_0^1 f(t)\, \varphi_n(t)\, dt \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

2. *Из условия*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2}\, \omega\left(f; \frac{1}{n}\right)_{L(1)} < \infty \tag{4}$$

вытекает, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(f)| < \infty. \tag{5}$$

Ниже приводятся некоторые критерии абсолютной сходимости кратных рядов Фурье — Хаара. При этом условия, обеспечивающие абсолютную сходимость ряда Фурье — Хаара функции $f(x_1, \ldots, x_k) \in L^{(k)}(0, 1)$, учитывают лишь ее свойства по каждой из переменных x_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, k)$, которые определяются с помощью величин

$$E^{(\nu)}_{n,\infty}(f; \varphi)_{L^{(k)}} = \\ = \inf_{P_{n,\nu}} \int_0^1 \ldots \int_0^1 |f(x_1, \ldots, x_k) - P_{n,\nu}(x_1, \ldots, x_k)|\, dx_1 \ldots dx_k,$$

где

$$P_{n,\nu}(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{r=1}^{n} a_r^{(\nu)}(x_1, \ldots, x_{\nu-1}, x_{\nu+1}, \ldots, x_k)\, \varphi_r(x_\nu),$$

$$a_r^{(\nu)}(x_1, \ldots, x_{\nu-1}, x_{\nu+1}, \ldots, x_k) \in L^{(k-1)}(0, 1).$$

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Если* $f(x_1, \ldots, x_k) \in L^{(k)}(0, 1)$ *и*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\ln n)^{k-1}}{n} E^{(\nu)}_{n,\infty}(f; \varphi)_{L^{(k)}} < \infty \quad (\nu = 1, 2, \ldots, k), \tag{6}$$

то почти для всех точек $x(x_1, \ldots, x_k) \in \mathscr{D}[0,1; \ldots; 0,1]$

$$\sum_{n_1=1}^{\infty} \ldots \sum_{n_k=1}^{\infty} |a_{n_1,\ldots,n_k}(f)\, \varphi_{n_1}(x_1) \ldots \varphi_{n_k}(x_k)| < \infty. \tag{7}$$

Теорема 2. *Если* $f(x_1, \ldots, x_k) \in L^{(k)}(0, 1)$ *и для некоторой системы чисел* $\alpha_\nu > 0$ $(\nu = 1, 2, \ldots, k)$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k = 1$ *выполнены условия*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \{E^{(\nu)}_{n,\infty}(f; \varphi)_{L^{(k)}}\}^{\alpha_\nu} < \infty \quad (\nu = 1, 2, \ldots, k), \tag{8}$$

то также справедливо утверждение теоремы 1.

Известно (см. ([1])), что для системы Хаара из абсолютной сходимости почти всюду ряда Фурье — Хаара не вытекает абсолютной сходимости ряда из модулей коэффициентов Фурье.

Следующие утверждения указывают условия, которым должна удовлетворять функция $f(x_1, \ldots, x_k) \in L^{(k)}(0,1)$ по каждой из переменных x_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, k)$, чтобы

$$\sum_{n_1=1}^{\infty} \ldots \sum_{n_k=1}^{\infty} |a_{n_1,\ldots,n_k}(f)| < \infty. \tag{9}$$

Теорема 3. *Если выполнены условия*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{k/2-1} E^{(\nu)}_{n,\infty}(f; \varphi)_{L^{(k)}} < \infty \quad (\nu = 1, 2, \ldots, k), \tag{10}$$

то для коэффициентов Фурье функции $f(x_1, \ldots, x_k) \in L^{(k)}(0,1)$ *справедливо* (9).

Теорема 4. *Если для некоторой системы чисел* $\alpha_\nu > 0$ $(\nu = 1, 2, \ldots, k)$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k = 1$ *выполнены условия*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2} \{E^{(\nu)}_{n,\infty}(f; \varphi)_{L^{(k)}}\}^{\alpha_\nu} < \infty \quad (\nu = 1, 2, \ldots, k), \tag{11}$$

то для коэффициентов Фурье функции $f(x_1, \ldots, x_k) \in L^{(k)}(0,1)$ *справедливо* (9).

Существуют примеры, показывающие, что приведенные утверждения в определенном смысле (см. ([2]), теорема 3) не могут быть улучшены.

Замечание 1. В теоремах 1 и 3 для обеспечения абсолютной сходимости ряда (1) функция $f(x_1, \ldots, x_k) \in L^{(k)}(0,1)$ должна по всем переменным x_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, k)$ обладать, одинаковыми свойствами. Теоремы 2 и 4 носят несколько иной характер. В них для обеспечения абсолютной сходимости ряда (1) функция $f(x_1, \ldots, x_k) \in L^{(k)}(0,1)$ может по одним переменным обладать худшими свойствами, зато по остальным переменным она должна обладать лучшими свойствами. Утверждения такого же типа для случая кратных рядов Фурье по тригонометрической системе приведены в работах ([2, 3]).

Замечание 2. При $k = 1$, т. е. для функции одной переменной, из теорем 1 — 4 благодаря неравенству типа Джексона (см. ([1])) вытекают соответственно утверждения 1 и 2 П. Л. Ульянова.

Однако в силу того, что для системы Хаара так же, как и для тригонометрической системы, справедливо неравенство

$$\omega\left(f; \frac{1}{n}\right)_{L^{(1)}} \leqslant \frac{c}{n+1} \sum_{\nu=0}^{n} E_\nu(f)_{L^{(1)}}, \tag{12}$$

условия (2) и (4) соответственно эквивалентны условиям (6) и (10) при $k = 1$. Неравенство (12) установлено М. Ф. Тиманом.

Поступило
18 VI 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. Л. Ульянов, Матем. сборн., 63, № 3, 356 (1964). [2] М. Ф. Тиман, ДАН, 137, № 5, 1074 (1961). [3] М. Ф. Тиман, Матем. сборн., 75, № 3, 354 (1968).