Доклады Академии наук СССР
1971. Том 198, № 6

УДК 513.83+519.54 *МАТЕМАТИКА*

В. В. ФЕДОРЧУК

ПРИМЕР ОДНОРОДНОГО БИКОМПАКТА С НЕСОВПАДАЮЩИМИ РАЗМЕРНОСТЯМИ

(Представлено академиком П. С. Александровым 17 XII 1970)

В настоящее время известен целый ряд примеров бикомпактов с 1-й аксиомой счетности с несовпадающими размерностями dim и ind (см [1–4]). Ниже будет построен такой однородный сепарабельный бикомпакт X с 1-й аксиомой счетности, что $\dim X = 1$, а $\operatorname{ind} X = \operatorname{Ind} X = 2$. Будет показано, что бикомпакт X не является фактор-пространством никакой топологической группы. С другой стороны, Б. А. Пасынков [5, 6] доказал, что для бикомпакта, являющегося фактор-пространством локально бикомпактной топологической группы (и даже в более общем случае), размерности dim, ind и Ind совпадают. Поэтому интересным представляется вопрос о совпадении размерности для бикомпакта, являющегося фактор-пространством топологической группы. Открытым остается также вопрос о совпадении индуктивных размерностей для однородных бикомпактов.

1. Построение бикомпакта X. Пусть S и T — экземпляры окружности. Точки окружностей S и T — это углы (действительные числа с отождествлением по модулю 2π). Через $|\varphi_2 - \varphi_1|$ обозначим наименьший по абсолютной величине угол, на который надо повернуть окружность S, чтобы перевести точку φ_1 в точку φ_2. Для каждого $\varphi_0 \in S$ построим непрерывное отображение f_{φ_0}: $S \setminus \{\varphi_0\} \to T$. Положим $f_{\varphi_0}(\varphi) = 2\pi \log_2 \frac{|\varphi - \varphi_0|}{2\pi} \bmod 2\pi$. В качестве множества, на котором будет построен бикомпакт X, возьмем $S \times T$. Обозначим через p проекцию $S \times T$ на S. Пусть U — открытое подмножество T, $\varphi_0 \in S$ и V — окрестность φ_0. Положим $O(U, \varphi_0, V) = \{\varphi_0\} \times U \cup p^{-1}(V \cap f_{\varphi_0}^{-1}U)$. Легко проверить, что всевозможные множества $O(U, \varphi, V)$, где семейства $\{U\}$ и $\{V\}$ являются базами открытых множеств пространств T и S, образуют базу некоторой хаусдорфовой топологии на X. Эта топология индуцирует на слоях $\{\varphi\} \times T = p^{-1}(\varphi)$ обычную топологию окружности. Отображение p: $X \to S$, очевидно, непрерывно и бикомпактно. Легко проверить, что отображение p замкнуто и даже сильно замкнуто в смысле работы [7]. Следовательно, X — бикомпакт, как совершенный прообраз бикомпакта. Поскольку отображение p: $X \to S$ неприводимо и S сепарабельно, пространство X также сепарабельно. Бикомпакт X удовлетворяет 1-й аксиоме счетности. Счетную базу в точке (φ, ψ) образуют множества $O(U_m, \varphi, V_n)$, где $\{U_m\}$ $(\{V_n\})$ — счетная база в точке ψ (φ).

2. $\dim X = 1$, $\operatorname{ind} X = \operatorname{Ind} X = 2$. Неравенство $\dim X \geqslant 1$ следует из того, что бикомпакт X содержит окружность в качестве замкнутого подмножества. Неравенство $\dim X \leqslant 1$ вытекает из того, что для сильно замкнутого отображения p: $X \to S$ имеем $\dim X \leqslant \max\{\dim p, \dim S\}$ (см. [7]).

Так как у каждой точки $(\varphi, \psi) \in X$ существует база окрестностей $\{O(U_m, \varphi, V_n)\}$, границы которых являются одномерными компактами (U_m, V_n — интервалы), $\operatorname{Ind} X \leqslant 2$.

Осталось проверить неравенство $\operatorname{ind} X \geqslant 2$. Для этого докажем, что X нельзя разбить никаким нульмерным множеством. Предположим, что такое разбиение возможно. Тогда существуют такие канонически открытые непересекающиеся множества $G, H \subset X$, что $X = [G \cup H]$ и множество

$F = X \setminus G \cup H$ является их общей нульмерной границей. В силу того, что отображение p неприводимо, открытое множество $p^{\#}(G \cup H)$ всюду плотно в S. Так как $G \cap H = \phi$ и для каждой точки $\varphi \in S$ множество $p^{-1}(\varphi)$ связно, то $p^{\#}(G \cup H) = p^{\#}G \cup p^{\#}H$.

Множество $C = pF = S \setminus p^{\#}(G \cup H)$ нигде не плотно. Более того, в любой окрестности точки $\varphi \in C$ содержатся как максимальные интервалы множества $p^{\#}G$, так и максимальные интервалы множества $p^{\#}H$. Это означает, что, если обозначить через C_G (C_H) множество концов максимальных интервалов $p^{\#}G$ ($p^{\#}H$), множества C_G и C_H являются плотными подмножествами в C. Кроме того, эти множества обладают свойством

(*) $\quad G \cap p^{-1}(\varphi)\, (H \cap p^{-1}(\varphi))$ всюду плотно в $p^{-1}(\varphi)$ для $\varphi \in C_G$ (C_H).

Обозначим через g_φ поворот окружности на угол φ ($g_\varphi(\varphi') = \varphi' + \varphi$). Пусть V — открытое множество на окружности V, содержащее 0, и U — открытое множество в T.

Лемма 1. *Пусть K — канонически открытое подмножество бикомпакта X.*

Тогда множество $C_K^{U,V} = \{\varphi \in C \mid O(U, \varphi, g_\varphi V) \subset K\}$ замкнуто в S.

Доказательство. Поворот g_{φ_0} порождает гомеоморфизм $\tilde{g}_{\varphi_0}$ бикомпакта X на себя ($\tilde{g}_{\varphi_0}(\varphi, \psi) = (\varphi_0 + \varphi, \psi)$). Множество таких гомеоморфизмов образует группу, которая относительно топологии равномерной сходимости гомеоморфна окружности ($\tilde{g}_{\varphi_0} \leftrightarrow \varphi_0$). С другой стороны $O(U, \varphi, g_\varphi V) = \tilde{g}_\varphi O(U, 0, V)$, так как $f_{\varphi_0}(\varphi) = f_{\varphi_0+\varphi_1}(\varphi + \varphi_1)$. Следовательно, $\{\varphi \in S \mid O(U, \varphi, g_\varphi V) \subset K\} = \{\varphi \in S \mid \tilde{g}_\varphi O(U, 0, V) \subset K\}$. Поэтому для доказательства леммы 1 достаточно показать, что множество гомеоморфизмов $\tilde{g}_\varphi$, для которых $\tilde{g}_\varphi O(U, 0, V) \subset K$, замкнуто. Это вытекает из следующего утверждения.

Лемма 2. *Пусть Γ — группа преобразований равномерного пространства X и K — канонически открытое подмножество пространства X.*

Тогда для любого открытого множества $W \subset X$ множество $\Gamma_W{}^K = \{g \in \Gamma \mid gW \subset K\}$ замкнуто в Γ относительно топологии равномерной сходимости.

Доказательство. Поскольку Γ — группа, без ограничения общности можно считать, что $W \subset K$. Пусть $g_0 \in [\Gamma_W{}^K]$ и $x \in g_0 W$. Положим $y = g_0^{-1}(x)$ и покажем, что $x \in [\{g(y) \mid g \in \Gamma_W{}^K\}]$. Пусть U — произвольная окрестность точки x и пусть $\{U, V\}$ — такое равномерное покрытие пространства X, что $x \notin V$. Существует равномерное покрытие $\alpha = \{A\}$ пространства X, звездно вписанное в покрытие $\{U, V\}$. По определению топологии, в Γ существует такой гомеоморфизм $g \in \Gamma_W{}^K$, что $(g_0(z), g(z)) \in \bigcup \{A \times A \mid A \in \alpha\}$ для всех $z \in X$. Значит, существует такой элемент A покрытия α, что $(x, g(y)) \in A \times A$. Следовательно $g(y) \in st_\alpha\{x\} \subset U$, т. е. $x \in [\{g(y) \mid g \in \Gamma_W{}^K\}]$. Тем более $x \in [\bigcup \{gW \mid g \in \Gamma_W{}^K\}]$. Следовательно, $g_0 W \subset \langle [\bigcup \{gW \mid g \in \Gamma_W{}^K\}] \rangle \subset \langle [K] \rangle = K$.

Лемма 2, а вместе с ней и лемма 1 доказаны.

Если $\{U_m\}$ — счетная база открытых множеств на окружности T, а $\{V_n\}$ — база окрестностей нуля на окружности S, то счетное семейство $\{O(U_m, 0, V_n) \mid m, n = 1, 2, \ldots\}$ открытых множеств обладает тем свойством, что база бикомпакта X получается из этого семейства при помощи всех сдвигов $\tilde{g}_\varphi$. Отсюда следует, что $\bigcup\limits_{m,n} (C_G^{U_m, V_n} \cup C_H^{U_m, V_n}) = C$. По лемме 1 множества $C_G^{U_m, V_n}$ и $C_H^{U_m, V_n}$ замкнуты, а их объединение — компакт. Следовательно, по крайней мере, одно из этих множеств, например, $C_G^{U_m, V_n}$ имеет непустую внутренность в C, т. е. содержит некоторый интервал множества C. Так как C_H плотно в C, имеем $C_H \cap C_G^{U_m, V_n} \neq \phi$. Это противоречит свойству (*). Таким образом, пространство X нельзя разбить никаким нульмерным множеством, т. е. $\operatorname{ind} X \geqslant 2$.

3. Б и к о м п а к т X о д н о р о д е н. Надо показать, что для любой пары точек $x_1 = (\varphi_1, \psi_1)$ и $x_2 = (\varphi_2, \psi_2)$ из X существует такой гомеоморфизм $h\colon X \to X$, что $h(x_1) = x_2$. Гомеоморфизм $g_{\varphi_2-\varphi_1}$ переводит точку (φ_1, ψ_1) в точку (φ_2, ψ_1). Осталось научиться переводить точку (φ, ψ_1) в точку (φ, ψ_2).

Л е м м а 3. *Пусть $\alpha\colon S \to S$ — такой диффеоморфизм, что $\alpha'(\varphi) > 0$ для всех $\varphi \in S$.*

Тогда отображение $h\colon X \to X$, задаваемое формулой

$$h(\varphi, \psi) = (\alpha(\varphi), \psi + 2\pi \log_2 \alpha'(\varphi)),$$

является гомеоморфизмом бикомпакта X на себя.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ясно, что h — взаимно однозначное отображение на X. Для того чтобы отображение h было гомеоморфизмом, достаточно доказать, что отображение h открыто. Надо показать, что образ hG базисной окрестности G точки (φ_0, ψ_0) содержит некоторую базисную окрестность точки $h(\varphi_0, \psi_0)$. Пусть $G = O(U, \varphi_0, V)$, где $U = \{\psi \in T \mid |\psi - \psi_0| < 2\pi/m\}$, а $V = \{\varphi \in S \mid |\varphi - \varphi_0| < 2\pi/2^n$. Тогда $hG = \{\alpha(\varphi_0)\} \times g_{2\pi \log_2 \alpha'(\varphi_0)}(U) \cup p^{-1}\{\alpha V \cap \alpha f_{\varphi_0}{}^{-1}(U)\}$. Положим $U_1 = \{\psi \in T \mid |\psi - \psi_0 - 2\pi \log_2 \alpha'(\varphi_0)| < 2\pi/(2m)\}$. Тогда $\psi_0 + 2\pi \log_2 \alpha'(\varphi_0) \in U_1 \subset g_{2\pi \log_2 \alpha'(\varphi_0)}(U)$.

Осталось показать, что существует такая окрестность V_1 точки $\alpha(\varphi_0)$, для которой $V_1 \cap f^{-1}_{\alpha'(\varphi_0)}(U_1) \subset \alpha V \cap \alpha f_{\varphi_0}{}^{-1}(U)$.

Множество U — это интервал $\psi_0 - 2\pi/m < \psi < \psi_0 + 2\pi/m$. Тогда $f_{\varphi_0}{}^{-1}(U)$ — это счетная сумма интервалов: $f^{-1}_{\varphi_0}(U) = \left(\bigcup\limits_{l=1}^{\infty} L_l\right) \cup \left(\bigcup\limits_{l=1}^{\infty} K_l\right)$. $\{L_l\}$ — интервалы слева от φ_0 (если $\varphi \in L_l$, то $-\pi < \varphi - \varphi_0 < 0$), $\{K_l\}$ — интервалы справа от φ_0. Пусть $L_l = (c_l^-, c_l^+)$, $K_l = (d_l^-, d_l^+)$. Пусть $f_{\varphi_0}(\varphi) = \psi$. Это значит, что

$$2\pi \log_2 |\varphi - \varphi_0| / (2\pi) = \psi - 2\pi l, \quad l = 1, 2, \dots .$$

Тогда $|\varphi - \varphi_0| = 2\pi \cdot 2^{\psi_0/(2\pi) - l}$, т. е. $\varphi = \varphi_0 \pm 2\pi \cdot 2^{\psi/(2\pi) - l}$.

Следовательно, положив $\psi_0/(2\pi) - l = a$, имеем

$$c_l^- = \varphi_0 - 2\pi \cdot 2^{a+1/m}, \quad c_l^+ = \varphi_0 - 2\pi \cdot 2^{a-1/m},$$
$$d_l^- = \varphi_0 + 2\pi \cdot 2^{a-1/m}, \quad d_l^+ = \varphi_0 + 2\pi \cdot 2^{a+1/m}.$$

Тогда

$$\alpha f^{-1}_{\varphi_0}(U) = \left(\bigcup_{l=1}^{\infty} \alpha(L_l)\right) \cup \left(\bigcup_{l=1}^{\infty} \alpha(K_l)\right),$$
$$\alpha(L_l) = (\alpha(c_l^-), \alpha(c_l^+)), \quad \alpha(K_l) = (\alpha(d_l^-), \alpha(d_l^+)).$$

Для множества $f^{-1}_{\alpha(\varphi_0)}(U_1)$ имеем

$$U_1 = (\psi_0 + 2\pi \log_2 \alpha'(\varphi_0) - 2\pi/(2m), \psi_0 + 2\pi \log_2 \alpha'(\varphi_0) + 2\pi/(2m)),$$

$$f^{-1}_{\alpha(\varphi_0)}(U_1) = \left(\bigcup_{l=1}^{\infty} \hat{L}_l\right) \cup \left(\bigcup_{l=1}^{\infty} \hat{K}_l\right), \quad \hat{L}_l = (\hat{c}_l^-, \hat{c}_l^+), \quad \hat{K}_l = (\hat{d}_l^-, \hat{d}_l^+),$$

где

$$\hat{c}_l^- = \alpha(\varphi_0) - 2\pi \cdot 2^{b+1/(2m)}, \quad \hat{c}_l^+ = \alpha(\varphi_0) - 2\pi \cdot 2^{b-1/(2m)},$$
$$\hat{d}_l^- = \alpha(\varphi_0) + 2\pi \cdot 2^{b-1/(2m)}, \quad \hat{d}_l^+ = \alpha(\varphi_0) + 2\pi \cdot 2^{b+1/(2m)},$$

причем $b = a + \log_2 \alpha'(\varphi_0)$.

Покажем, что, начиная с некоторого l_0, все $\hat{L}_l \subset \alpha(L_l)$ и $\hat{K}_l \subset \alpha(K_l)$. Надо показать, что $\alpha(c_l^-) < \hat{c}_l^-$, $\hat{c}_l^+ < \alpha(c_l^+)$ и $\alpha(d_l^-) < \hat{d}_l^-$, $\hat{d}_l^+ < \alpha(d_l^+)$.

По любому $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $[\alpha(\varphi) - \alpha(\varphi_0)] / (\varphi - \varphi_0) > \alpha'(\varphi_0) - \varepsilon$ при $-\delta < \varphi - \varphi_0 < 0$, т. е. $\alpha(\varphi) < \alpha(\varphi_0) + [\alpha'(\varphi_0) - \varepsilon][\varphi - \varphi_0]$. Положим $\varphi = \varphi_0 - 2\pi \cdot 2^{a+1/m}$. Тогда $\varphi - \varphi_0 = -2\pi \cdot 2^{a+1/m}$.

Следовательно, при $2\pi \cdot 2^{a+1/m} < \delta$ имеем

$$\alpha(c_l^-) = \alpha(\varphi_0 - 2\pi \cdot 2^{a+1/m}) < \alpha(\varphi_0) + [\alpha'(\varphi_0) - \varepsilon](-2\pi \cdot 2^{a+1/m}) =$$
$$= \alpha(\varphi_0) - 2\pi\alpha'(\varphi_0) \cdot 2^{a+1/m} + \varepsilon \cdot 2\pi \cdot 2^{a+1/m}.$$

Тогда $\hat{c}_l^- - \alpha(c_l^-) > \alpha(\varphi_0) - 2\pi\alpha'(\varphi_0) \cdot 2^{a+1/(2m)} - \alpha(\varphi_0) + 2\pi\alpha'(\varphi_0) \cdot 2^{a+1/m}$

$$- \varepsilon \cdot 2\pi \cdot 2^{a+1/m} = 2\pi \cdot 2^{a+1/(2m)}[-\alpha'(\varphi_0) + \alpha'(\varphi_0) \cdot 2^{1/(2m)} - \varepsilon \cdot 2^{1/(2m)}].$$

Взяв $\varepsilon = \dfrac{\alpha'(\varphi_0)(2^{1/(2m)} - 1)}{2^{1/(2m)}}$, имеем $\hat{c}_l^- - \alpha(c_l^-) > 0$ при $2\pi \cdot 2^{a+1/m} < \delta$, т. е. для всех l, начиная с некоторого.

Аналогично проверяются три оставшиеся неравенства

$$\hat{c}_l^+ < \alpha(c_l^+), \quad \alpha(d_l^-) < \hat{d}_l^- \text{ и } \hat{d}_l^+ < \alpha(d_l^+).$$

Таким образом, $\hat{L}_l \subset \alpha(L_l)$ и $\hat{K}_l(\alpha(K_l)$ для всех l, начиная с некоторого. Следовательно, существует такая окрестность V_1 точки $\alpha(\varphi_0)$, что

$$V_1 \cap f^{-1}_{\alpha(\varphi_0)}(U_1) \subset \alpha V \cap \alpha f^{-1}_{\varphi_0}(U).$$

Это завершает доказательство леммы.

Теперь для того, чтобы можно было перевести точку (φ_0, ψ_1) в точку (φ_0, ψ_2) посредством некоторого гомеоморфизма всего пространства, достаточно, в силу леммы 3, существования диффеоморфизма α: $S \to S$ $(\alpha' > 0)$ с заданными свойствами $\alpha(\varphi_0) = \varphi_0$ и $\alpha'(\varphi_0) = 2^{(\psi_2 - \psi_1)/(2\pi)}$. Но этот факт очевиден. Таким образом, бикомпакт X однороден.

Замечание. Бикомпакт X сильно однороден в том смысле, что для любых двух точек $x_1, x_2 \in X$ существует такой гомеоморфизм h: $X \to X$, для которого $h(x_1) = x_2$ и $h(x_2) = x_1$. Однако размеры этой заметки не позволяют привести довольно громоздкие доказательства этого факта.

4. Бикомпакт X не является фактор-пространством топологической группы.

Несложно проверить следующее утверждение.

Лемма 4. *Пусть f: $Y \to Z$ — неприводимое отображение однородного бикомпакта Y на бикомпакт Z. Предположим, что прообраз какой-нибудь точки не вырожден и линейно связан.*

Тогда, если бикомпакт Y является фактор-пространством топологической группы, то существуют такие две точки $y_1, y_2 \in Y$, связанные простой дугой, что $f(y_1) \neq f(y_2)$.

Легко проверить, что бикомпакт X удовлетворяет всем условиям леммы 4, кроме последнего (точки, принадлежащие различным слоям $p^{-1}(\varphi)$, не могут быть связаны дугами). Следовательно, X не является фактор-пространством топологической группы.

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
2 XII 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. В. Федорчук, ДАН, **182**, № 2, 275 (1968). [2] В. В. Филиппов, ДАН, **186**, № 5, 1020 (1969). [3] В. В. Филиппов, ДАН, **192**, № 3, 516 (1970). [4] Б. А. Пасынков, ДАН, **192**, № 3, 503 (1970). [5] Б. А. Пасынков, УМН, **17**, № 5, 129 (1962). [6] Б. А. Пасынков, ДАН, **161**, № 2, 281 (1965). [7] В. В. Федорчук, ДАН, **185**, № 1, 54 (1969).