Доклады Академии наук СССР
1971. Том 198, № 6

УДК 519.46 *МАТЕМАТИКА*

А. И. ШТЕРН

СЕПАРАБЕЛЬНЫЕ ЛОКАЛЬНО БИКОМПАКТНЫЕ ГРУППЫ С ДИСКРЕТНЫМ НОСИТЕЛЕМ РЕГУЛЯРНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

(*Представлено академиком И. Н. Векуа 6 I 1971*)

Пусть G — локально бикомпактная топологическая группа. Ее двойственным пространством $\hat{G}$ называется множество классов эквивалентности неприводимых унитарных представлений G, снабженное естественной топологией *. Известно, что если группа G бикомпактна, то ее двойственное пространство дискретно. Хорошо известно также, что в классе коммутативных локально бикомпактных групп бикомпактные и дискретные группы являются двойственными друг другу: это утверждение является частью теоремы двойственности Л. С. Понтрягина.

Если группа G некоммутативна, то ее двойственное пространство $\hat{G}$ не имеет естественной групповой структуры, но, оказывается, в терминах топологического пространства $\hat{G}$ можно получить критерий бикомпактности группы G.

Теорема 1. *Пусть G — локально бикомпактная группа с дискретным двойственным пространством $\hat{G}$.*

Тогда G бикомпактна.

При доказательстве теоремы 1 используется

Теорема 2. *Пусть G — вполне несвязная сепарабельная локально бикомпактная группа. Пусть существует унитарное представление π группы G с дискретным носителем **, определяющее точное представление $L^1(G)$.*

Тогда G бикомпактна.

Не останавливаясь на доказательстве этих утверждений, воспользуемся результатом теоремы 2 и покажем, что в сепарабельном случае теорема 1 может быть улучшена.

Теорема 3. *Пусть G — сепарабельная локально бикомпактная группа с дискретным носителем регулярного представления.*

Тогда G бикомпактна.

Доказательство. Пусть G_0 — компонента единицы группы G. Тогда G/G_0 вполне несвязна. Согласно ([5]), теорема 16, G/G_0 содержит бикомпактную открытую подгруппу $\tilde{H}$. Пусть H — полный прообраз $\tilde{H}$ в G. Тогда H — открытая подгруппа в G и $H/G_0 \approx \tilde{H}$. Пусть λ_G, λ_H — регулярные представления групп G и H соответственно, $\hat{G}_r$, $\hat{H}_r$ — носители этих представлений.

---

* Определим операцию замыкания (ср. ([1-4])). Если π — унитарное представление G в комплексном гильбертовом пространстве H, назовем диагональным элементом представления π функцию на G вида $(\pi(g)\xi, \xi)$, где $\xi \in H$, $\|\xi\| = 1$. Если $\rho \in \hat{G}$, $S \subset \hat{G}$, то скажем, что ρ принадлежит замыканию S, если любой диагональный элемент ρ есть равномерный предел на любом бикомпакте диагональных элементов представлений, принадлежащих S.

** Носителем представления π называется наименьшее замкнутое множество R в двойственном пространстве такое, что любой диагональный элемент π является равномерным пределом на любом бикомпакте выпуклых комбинаций диагональных элементов представлений $\rho \in R$.

I. $\hat{H}_\tau$ не более чем счетно. Пусть $\rho \in \hat{H}_\tau$. Представление U^ρ группы G, индуцированное представлением ρ группы H, имеет носитель, содержащийся в носителе регулярного представления группы G (ввиду непрерывности операции индуцирования, см. ([1])). Так как носитель $\hat{G}_\tau$ регулярного представления G дискретен по предположению, то, согласно ([2]), п°8.6.8, представление U^ρ разлагается в прямую сумму представлений, кратных неприводимым представлениям $\pi \in \hat{G}_\tau$. С другой стороны, согласно ([6]), сужение $U^\rho|_H$ разлагается в счетную прямую сумму представлений группы H, каждое из которых индуцировано сужением представления ρ^x группы $x^{-1}Hx$ на $H \cap x^{-1}Hx$ (ρ^x действует по формуле: $\rho^x(h) = \rho(xhx^{-1})$, $h \in x^{-1}Hx$) для некоторого $x \in G$. Но $H \cap x^{-1}Hx$ открыта для любого $x \in G$, т. е. $H \cap x^{-1}Hx \supset G_0$. Так как H / G_0 бикомпактна, то индекс $H \cap x^{-1}Hx$ в H и в $x^{-1}Hx$ конечен. Тогда (см. ([6])) сужение неприводимого представления ρ^x на $H \cap x^{-1}Hx$ разлагается в конечную прямую сумму неприводимых представлений μ_i группы $H \cap x^{-1}Hx$, и представление группы H, индуцированное каждым μ_i, разлагается в конечную прямую сумму неприводимых представлений группы H. Отсюда следует, что каждое из представлений π группы G, участвующих в разложении представлений U^ρ, $\rho \in \hat{H}_\tau$, содержится в $\hat{G}_\tau$ и имеет сужение на подгруппу H, разложимое в прямую сумму неприводимых представлений H. Напомним теперь, что ввиду сепарабельности G все представления $\pi \in \hat{G}$ действуют в сепарабельных пространствах и $\hat{G}$ (тем более $\hat{G}_\tau$) удовлетворяет второй аксиоме счетности (см. ([3])). Следовательно, $\hat{G}_\tau$ не более чем счетно. Ввиду непрерывности операции сужения представлений на подгруппу (см. ([7])), сужение каждого из представлений $\pi \in \hat{G}_\tau$ на H имеет носитель, содержащийся в $\hat{H}_\tau$, поэтому множество представлений $\nu \in \hat{H}_\tau$, входящих прямым слагаемым в разложение суженния $\pi|_H$ для какого-либо $\pi \in \hat{G}_\tau$, не более чем счетно. Но H открыта, поэтому $U^\rho|_H$ содержит ρ прямым слагаемым ([12]). Следовательно, любое $\rho \in \hat{H}_\tau$ входит прямым слагаемым в сужение $\pi|_H$ для некоторого $\pi \in \hat{G}_\tau$. Утверждение I доказано.

Так как G_0 есть компонента единицы H и $H / G_0 \approx \tilde{H}$ бикомпактна, то H проективно-лиева ([8]). Пусть N — бикомпактный нормальный делитель в H, по которому фактор-группа является группой Ли.

II. $\hat{L}_\tau$ не более чем счетно. Так как N бикомпактна, то единичное представление группы N лежит в носителе регулярного представления. Следовательност, по ([1]), представление группы H, индуцированное единичным представлением N, имеет носитель, содержащийся в $\hat{H}_\tau$. Отождествим представления группы H / N с представлениями H, тривиальными на N. Тогда, как легко проверить, можно рассматривать $\hat{L}$ как замкнутое подмножество $\hat{H}$, а представление группы H, индуцированное единичным представлением группы N, отождествляется с регулярным представлением $L = H / N$. Следовательно, $\hat{L}_\tau \subset \hat{H}_\tau$, поэтому $\hat{L}_\tau$ не более чем счетно. Утверждение II доказано.

Пусть L_0 — компонента единицы L. Так как L_0 открыта в L, то ее полный прообраз H_0 в H также открыт. Но $H_0 \supset G_0$, поэтому образ H_0 в H / G_0 открыт. Так как H / G_0 бикомпактна, то индекс H_0 / G_0 в H / G_0 конечен, т. е. индекс L_0 в L конечен.

III. $\widehat{(L_0)}_\tau$ не более чем счетно. Из непрерывности операций сужения и индуцирования ([1,7]) получаем, что (ввиду конечности L / L_0, см. ([6])) любое представление $\rho \in \widehat{(L_0)}_\tau$ индуцирует представление U^ρ группы L, являющееся конечной прямой суммой неприводимых представлений $\pi \in \hat{L}_\tau$; сужение каждого из этих $\pi \in \hat{L}_\tau$ на подгруппу L_0 есть конечная прямая сумма представлений $\nu \in (\widehat{L_0})_r$. Наконец, $U^\pi|_{L_0}$ содержит ρ прямым слагаемым. Следовательно, $(\widehat{L_0})_r$ не более чем счетно и III доказано.

L_0 — связная группа Ли. Согласно теореме Леви — Мальцева ([9]), L_0 содержит замкнутую разрешимую подгруппу R такую, что $T = L_0 / R$ — полупростая группа Ли.

IV. $\hat{T}_r$ не более чем счетно. Так как единичное представление группы R содержится в носителе регулярного представления (([3]), 18.3.9), то достаточно повторить рассуждение в II.

V. T бикомпактна. Утверждение сразу следует из описания неприводимых унитарных представлений некомпактной полупростой группы Ли класса 0 относительно максимальной компактной подгруппы и меры Планшереля на множестве таких представлений (см. напр. ([16]), ([13])): $\hat{T}_r$ в некомпактном случае имеет мощность континуума.

VI. $\widehat{L_0} = (\widehat{L_0})_r$. Следует из V и ([3]), 18.3.9.

Напомним, что H_0 — полный прообраз L_0 в H — открыт. Таким образом, H_0 — открыто-замкнутая подгруппа G, образ которой в G / G_0 бикомпактен.

VII. $\widehat{H_0} = (\widehat{H_0})_r$. $L_0 = H_0 / N$, где N бикомпактен. Пусть τ — каноническое отображение H_0 на L_0. Если $F(s^*)$ — непрерывная финитная функция на H_0/N такая, что $|(F * F^*)(s^*) - 1| < \varepsilon$ на бикомпактном множестве $C \subset H_0/N$, то, полагая $f(s) = F(\tau(s))$, $s \in H_0$, получаем непрерывную финитную функцию на H_0 такую, что $|(f * f^*)(s) - 1| < \varepsilon$ на $\tau^{-1}(C)$. Тогда утверждение VII следует из ([3]), 18,3.6.

VIII. $\widehat{G_0} = (\widehat{G_0})_r$. Так как G_0 — замкнутая подгруппа (и даже нормальный делитель) в H_0 и единичное представление группы H_0 содержится в носителе регулярного представления, то, ввиду непрерывности операции сужения, единичное представление G_0 содержится в носителе сужения регулярного представления H_0 на G_0. Но это сужение кратно регулярному представлению группы G_0, т. е. его носитель есть $(\widehat{G_0})_r$. Поэтому $(\widehat{G_0})_r$ содержит единичное представление G_0, т. е. $(\widehat{G_0})_r = \widehat{G_0}$ (([3]), 18.3.6).

IX. G/G_0 бикомпактна. Согласно VIII, единичное представление группы G_0 лежит в носителе регулярного представления группы G_0. Повторяя рассуждения в II, получаем, что носитель регулярного представления группы G / G_0 может быть отождествлен с замкнутым подмножеством носителя $\hat{G}_r$ регулярного представления группы G. Так как регулярное представление группы G / G_0 определяет точное представление алгебры $L^1(G / G_0)$, а $(\widehat{G / G_0})_r$ дискретен как подмножество $\hat{G}_r$, то группа G / G_0 бикомпактна по теореме 2. Утверждение IX доказано.

Мы можем считать теперь, что группа H (см. начало доказательства теоремы 3) совпадает с группой G. Тогда $L = G / N$ — группа Ли с дискретным носителем регулярного представления.

X. $(\widehat{L_0})_r$ дискретно. Воспользуемся рассуждением в III. Так как каждое представление $\rho \in \hat{L}_r$ содержится прямым слагаемым лишь в конечном числе представлений U^π, $\pi \in (\widehat{L_0})_r$,— пусть $U^{\pi_1}, \ldots, U^{\pi_n}$ — то множество $\{\pi_1, \ldots, \pi_n\}$ открыто в $(\widehat{L_0})_r$ (если бы одна из точек π_i лежала в замыкании дополнения этого множества до $(\widehat{L_0})_r$, то U^{π_i} разлагалось было представлениям, не содержащим ρ, что невозможно). Так как L_0 открыто в L, то мера Хаара на L индуцирует меру Хаара на L_0. Отождествим $L^1(L_0)$ с замкнутой подалгеброй $L^1(L)$. Пусть $\rho \in \hat{L}_r$. Тогда ρ изолирована в $\hat{L}_r$, поэтому замкнута. Тогда $\rho(f)$ вполне непрерывен для любой $f \in L^1(L)$

(см. ([3], [11])), т. е. и для любой $f \in L^1(L_0)$. Так как сужение вполне непрерывного оператора вполне непрерывно, то $\pi(f)$ вполне непрерывны для всех $f \in L^1(L_0)$ и всех π, входящих в разложение сужения $\rho|_{L_0}$. Поэтому все $\{\pi_1\}, \ldots, \{\pi_n\}$ замкнуты, а так как $\{\pi_1, \ldots, \pi_n\}$ открыто, то и все $\{\pi_i\}$ открыты. Утверждение X доказано.

Напомним, что ввиду VI $\widehat{L_0} = (\widehat{L_0})_r$. Так как единичное представление изолировано в $\hat{L}_0$ по X и входит в разложение регулярного представления по VI, то единичное представление входит прямым слагаемым в разложение регулярного представления. Следовательно, мера всей группы L_0 конечна и L_0 бикомпактна. Тогда L бикомпактна и (ввиду бикомпактности N) группа G бикомпактна. Теорема 3 доказана.

Примеры группы $\mathscr{G}$ унимодулярных аффинных преобразований $\mathfrak{p}$-адической прямой, т. е. преобразований $t \to ut + s$, где $t, s \in Q_{\mathfrak{p}}$, $u \in U_{\mathfrak{p}}$ (группе единиц поля $Q_{\mathfrak{p}}$), показывает, что существуют некомпактные группы со счетным двойственным пространством, каждая точка которого замкнута, а регулярное представление группы $\mathscr{G}$ разлагается в прямую сумму представлений, каждое из которых изолировано в $\hat{\mathscr{G}}$.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
16 XII 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. M. G. Fell, Canad. J. Math., 14, 2, 237 (1962). [2] А. А. Кириллов, Усп. матем., наук, 17, № 4, 57 (1962). [3] J. Dixmier, C*-algèbres et leurs représentations, Paris, 1964. [4] Д. А. Каждан, Функциональн. анализ и его приложения, 1, в. 1, 71 (1967). [5] Л. С. Понтрягин, Непрерывные группы, М., 1954. [6] Г. Макки, Сборн. пер., Математика, 6, 6, 57 (1962). [7] J. M. G. Fell, Trans. Am. Math. Soc., 94, 3, 365 (1960). [8] В. М. Глушков, УМН, 12, № 2, 3 (1957). [9] К. Шевалле, Теория групп Ли, 3, М., 1958. [10] F. Bruhat, Bull. Soc. Math. France, 84, 2, 92 (1956). [11] J. Dixmier, C. R., 258, 17, 4184 (1964). [12] J. M. G. Fell, Trans. Am. Math. Soc., 110, 3, 424 (1964). [13] С. Г. Гиндикин, Ф. И. Карпелевич, ДАН, 145, № 2, 252 (1962).